МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

КЫРГЫЗСКО – РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Медицинский факультет

Кафедра физики, медицинская информатики и биологии

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Бишкек 2012

УДК
ББК
Л

Составители: доцент, А.А. Сорокин; доцент, Т.И. Сологубова; доцент, И.Р. Тупеев; ст. преп., Н.А. Абдукаримова; ст. преп., Р.Б. Молдонасиров

Рекомендовано к изданию Ученым советом КРСУ
(пр. №__ от ……..)

Рецензенты:

*Допущено Министерством образования и науки Кыргызской Республики в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений
(пр. №………)*

Л…. ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА: Учеб. Пособие/Сост.А.А. Сорокин, Т.И. Сологубова, И.Р. Тупеев, Н.А. Абдукаримова, Р.Б. Молдонасиров.-Бишкек: КРСУ, 2012.-…с.

ISBN …………………

Работа представляет собой учебное пособие, которое поможет студентам-медикам освоить основы высшей математики, математической статистики и подготовиться к практическим занятиям.

К ………..

ISBN …………………

УДК
ББК

АННОТАЦИЯ

Математическая подготовка студентов медицинских вузов дает возможность более глубоко изучить курсы медицинской и биологической физики, информатики, бионеорганической и биоорганической химии, технологии лекарственных веществ, рентгенологии и другие медико-биологические дисциплины.

Теория курса «Высшая математика» охватывает те разделы математики, которые находят применение в медицине, и помогут студентам приобрести математические навыки для дальнейшей работы.

Производная функции может быть использована при математическом описании динамики химических реакций, при нахождении градиентов скорости, давления, концентрации, температуры и других величин.

Интегральное исчисление является составной частью математического анализа и применяется при решении многих задач химии, биологии, медицины именно в тех случаях, когда по известной производной требуется найти вид самой функции.

Дифференциальные уравнения используются при изучении явлений и процессов во всех областях знаний, в том числе и в медицине. Сформулировав задачу на языке дифференциальных уравнений, специалист–медик получает готовый аппарат для численного решения задачи, изучения качественных особенностей этого решения. Кроме того, дифференциальные уравнения являются одним из средств математического моделирования. Пользуясь ими, устанавливается связь между переменными величинами, характеризующими данный процесс или явление.

Теория вероятностей изучает закономерности, присущие случайным событиям, величинам и процессам массового характера. Теория вероятностей нашла применение в теории эпидемий, в разработке математических методов медицинской диагностики, в организации здравоохранения и т.д.

Математическая статистика - раздел математики, непосредственно примыкающий к теории вероятностей. Медицинские задачи, которые решаются с её помощью, принимают ту или иную форму в зависимости от характера вопроса и объема накопленного опытного материала.

Наиболее важными для студентов-медиков при изучении дисциплины “Высшая математика” являются знания статистических методов в клинических и лабораторно-экспериментальных исследованиях. Многочисленность и многообразие количественных показателей, получаемых при обследовании различных систем и органов человека в клинической практике и в эксперименте, вызывают необходимость их обобщения и поиска наиболее приемлемых математических и математико-статистических критериев, удовлетворяющих научным требованиям медицины.

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕМА №1
ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Понятие производной функции и понятие дифференциала функции являются одними из основных понятий математического анализа. Производная характеризует быстроту изменения функции при изменении её аргумента и может быть использована при математическом описании динамики химических реакций, при нахождении градиентов скорости, давления, концентрации, температуры и других величин.

Цель занятия:

- Уметь объяснить физический смысл производной первого и второго порядков.
- Научиться находить производные от элементарных и сложных функций.
- Научиться находить производные высших порядков.
- Научиться находить дифференциалы функций.
- Научиться приближенно вычислять функции с помощью дифференциала.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Пусть на интервале **]а,в[** определена функция ***y=f(x)***. При приращении аргумента Δx функция получит приращение Δf, которое определится равенством: $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$, тогда отношение:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

выражает среднюю скорость изменения функции ***f(x)*** относительно аргумента ***x*** на интервале $]x, x+\Delta x[$.

Предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда $\Delta x \to 0$, при условии, что этот предел существует, называется производной функции в точке $x \in]а,в[$:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

2. МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Решение задачи о нахождении скорости различных процессов приводит к понятию производной функции. Рассмотрим скорость прямолинейного движения. Пусть тело, двигаясь с переменной скоростью, прошло путь ***S***, тогда средняя скорость равна:

$$\vartheta_{cp} = \frac{S}{t},$$

где ***t***- время движения тела. Разобьем весь путь на **n** отдельных участков:$\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$, пройденные соответственно за время: $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_n$, тогда скорости на этих участках:

$$\frac{\Delta S_1}{\Delta t_1}; \frac{\Delta S_2}{\Delta t_2}; \ldots; \frac{\Delta S_n}{\Delta t_n}$$

Если величину участков уменьшить, т.е. задать $\Delta t \to 0$, то средняя скорость стремится к пределу, который представляет собой скорость движения тела в данный момент времени или мгновенную скорость:

$$\vartheta_{мгн} = \lim_{\Delta t \to 0} \vartheta_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Таким образом, **мгновенная скорость есть предел отношения приращения пути к приращению времени, когда приращение времени стремится к нулю.**

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Пусть функция $y=f(x)$ задана графически. Возьмем на кривой произвольно точку $M(x,y)$. Зададим приращение аргументу Δx, тогда функция получит приращение Δy и на графике мы получим точку M_1 с координатами $(x+\Delta x; y+\Delta y)$. Проведем секущую MM_1 и обозначим угол наклона секущей к оси Ox через φ: $tg\varphi = \Delta y/\Delta x$

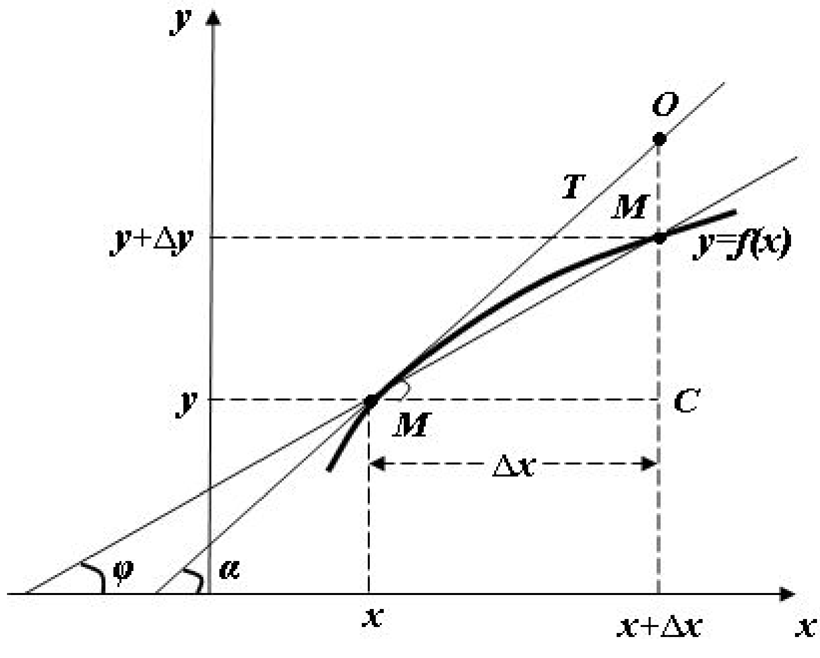


Рис 1. Геометрический смысл производной и дифференциала функции.

Пусть $\Delta x \to 0$, тогда точка M_1 будет стремиться к точке M, величина угла φ будет изменяться. При приближении MM_1 к касательной MT, угол φ приближается к углу α, следовательно, $tg\alpha$ равен угловому коэффициенту касательной:

$$\kappa = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Таким образом, **геометрический смысл производной заключается в том, что она есть угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке.**

4. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОИЗВОДНЫХ

1. Производная постоянной величины равна нулю.

$$(C)'_x = 0, \text{ где } C=const$$

2. Постоянный множитель выносится за знак производной.
3. Производная аргумента по самому аргументу равна единице: $x'_x=1$.
4. Производная алгебраической сумму функций равна алгебраической сумме производных этих функций:

$$(u \pm \vartheta)'_x = u'_x \pm \vartheta'_x$$

Например: $(x^5+\sin x-1)'_x=(x^5)'_x+(\sin x)'_x-(1)'_x=5x^4+\cos x$

5. Производная произведения двух функций определяются по формуле: $(uv)'_x=uv'_x+u'_xv$

Например: $(e^x \cdot \ln x)'_x = e^x(\ln x)'_x + (e^x)'_x \ln x = e^x \cdot \frac{1}{x} + e^x \ln x$

6. Производная частного двух функций определяются по формуле:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'_x v - v'_x u}{v^2}, \text{при } v \neq 0$$

Например: $\left(\frac{x^8}{\cos x}\right)' = \frac{(x^8)'_x \cos x - (\cos x)'_x x^8}{\cos^2 x} = \frac{8x^7 \cos x + x^8 \sin x}{\cos^2 x}$

5. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

1. $(C)'_x = 0$ при $C=const$;
2. $(x)'_x = 1$;
3. $(x^n)'_x = nx^{n-1}$;

9. $(\cos x)'_x = -\sin x$;
10. $(tgx)'_x = \frac{1}{\cos^2 x}$;
11. $(ctgx)'_x = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

4. $\left(a^{x}\right)'_{x} = a^{x}\ln a$;

5. $\left(e^{x}\right)'_{x} = e^{x}$;

6. $(\ln x)'_{x} = \frac{1}{x}$;

7. $(\lg x)'_{x} = \frac{1}{x}\cdot 0{,}4343$;

8. $(\sin x)'_{x} = \cos x$;

12. $(\arcsin x)'_{x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$;

13. $(\arccos x)'_{x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$;

14. $(arctgx)'_{x} = \frac{1}{1+x^{2}}$;

15. $(arcctgx)'_{x} = -\frac{1}{1+x^{2}}$.

6. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть у нас есть сложная функция: ***y=u(v(x)).*** Эту сложную функцию (или функцию от функции) можно представить в виде элементарных функций, которые являются её промежуточными аргументами. Сложная функция дифференцируется по следующему правилу:

Если функция ***v(x)*** имеет производную ***v'(x),*** а функция ***y=u(v)*** производную $y'_v=u'(v)$в соответствующей точке ***v***, то сложная функция ***y=u(v(x))*** в данной точке ***x*** имеет производную y'_x, которая находится по формуле: $y'_x=u'(v)\cdot v'(x)$

Например: $(\sin^{5} x)'_{x} = 5\sin^{4} x\cdot(\sin x)' = 5\sin^{4} x\cdot\cos x$

7. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Производная от производной первого порядка называется производной второго порядка и обозначается: y''_{xx} или $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Производная от производной второго порядка называется производной третьего порядка и т.д.

Физический смысл производной второго порядка заключается в том, что вторая производная от пути **S** по времени **t** равна мгновенному ускорению переменного движения:

$$a_{мгн.} = \lim_{\Delta t\to 0} a_{ср} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = \vartheta'_t = S''_{tt}$$

Задача: Найти скорость и ускорение точки, совершающей гармонические колебания по закону:

$$x = A\sin(\omega t+\varphi) \text{ где } A, \omega, \varphi - const$$

$$\vartheta = x'_t = (A\sin(\omega t + \varphi))'_t = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a = \vartheta'_t = x''_{tt} = (A\omega \cos(\omega t + \varphi))'_t = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

8. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ И ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Дифференциалом функции ***y=f(x)*** называется произведение производной этой функции на дифференциал аргумента ***dx*** или на приращение аргумента Δx:

$$dy = f'(x) \cdot dx \qquad dx \approx \Delta x$$

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

Для объяснения геометрического смысла дифференциала функции обратимся к рисунку 1. Из треугольника **МОС** находим:

$$OC = MC\ tg\alpha = \Delta x \cdot y'_x.$$

Но из определения дифференциала функции: $y'_x \Delta x = dy$, следовательно,

$$OC = dy.$$

Таким образом, отрезок **ОС**, равный дифференциалу функции, геометрически представляет собой приращение ординаты касательной к графику функции в точке с абциссой ***x*** при переходе от точки касания в точку с абциссой $(x+\Delta x)$.

9. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Пусть дана функция **n**–переменных:

$$Z = f(x, y, \ldots, t)$$

В этом случае вводится понятие частной производной: $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \ldots, \dfrac{\partial z}{\partial t}$

Частной производной функции *Z=f (x, y)* по аргументу *x* называется предел отношения приращения функции, когда изменяется *x*, к приращению аргумента Δx, когда приращение аргумента стремится к нулю ($\Delta x \to 0$)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Соответственно частная производная по ***y*** обозначается $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Если частную производную от функции ***Z = f(x, y)*** по ***x*** умножить на ее дифференциал ***dx***, то получим частный дифференциал по аргументу ***x***:

$$\partial z_x = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx$$

Частный дифференциал по y будет равен: $\partial z_y = \frac{\partial z}{\partial y} dy$

Сумма частных дифференциалов определяет полный дифференциал функции dz.

Полный дифференциал для функции двух переменных $Z = f(x, y)$ равен:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$$

10. ПРИМЕНЕНИЕ ПОНЯТИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛА ФУНКЦИИ В ПРИБЛИЖЁННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

При достаточно малых $|\Delta x|$ выполняется условие: $\Delta y \approx dy$.

Учитывая, что $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,

$dy = f'(x_0)\Delta x$, получаем

$f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$, откуда

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0)+f'(x_0)\,\Delta x \qquad (*)$$

Например: Вычислить приближённо $\sqrt{27}$.

Решение: $\sqrt{27} = \sqrt{25+2}$, тогда $x_0 = 25$, $\Delta x = 2$. Применяя формулу (*), получаем:

$$\sqrt{27} = \sqrt{25+2} \approx \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}} \cdot 2 \approx 5{,}2.$$

Эталоны решения типовых задач

Задача 1(а). Найти производную функции: $y = x^5 - 6x + 4$.

Решение: Для решения задачи необходимо применить правило дифференцирования алгебраической суммы: $(u \pm v \pm \omega)' = u' \pm v' \pm \omega'$ и формулу производной степенной функции: $(x^n)' = nx^{n-1}$. Тогда получим: $y' = (x^5)' - (6x)' + 4' = 5x^4 - 6.$

Ответ: $y' = 5x^4 - 6$

Задача 1(б). Найти производную функции: $y = e^x \sin x$

Решение: Применяя правило дифференцирования произведения функций $(u \cdot v)' = u'v + v'u$, находим

$$y' = (e^x \cdot \sin x)' = (e^x)' \sin x + (\sin x)' e^x = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x).$$

Ответ: $y^{/} = e^{x}(\sin x + \cos x)$.

Задача 1(в) .Найти производную функции: $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$; $x^2 - 1 \neq 0$.

*Решение***:** Применяя правило дифференцирования частного функций: $\left(\dfrac{u}{v}\right)^{/} = \dfrac{u^{/}v - v^{/}u}{v^2}$; $\quad v \neq 0$

находим: $y^{/} = \left(\dfrac{x}{x^2 - 1}\right)^{/} = \dfrac{(x)^{/}(x^2 - 1) - x(x^2 - 1)^{/}}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{(x^2 - 1) - x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = -\dfrac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$.

Ответ: $y^{/} = -\dfrac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$

Задача 2(а). Найти производную функции: $y = \sqrt{x^2 + 5}$.

Решение: Данная функция может быть представлена в виде сложной степенной функции: $y = (x^2 + 5)^{\frac{1}{2}}$.

В соответствии с формулой производной сложной степенной функции: $\left(u^{n}\right)^{/} = n \cdot u^{n-1} \cdot u^{/}$, имеем:

$$y^{/} = \left[\left(x^2 + 5\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{/} = \frac{1}{2}\left(x^2 + 5\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x^2 + 5\right)^{/} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 5}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}.$$

Ответ: $y^{/} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}$.

Задача 2(б). Найти производную функции: $y = \sin 10x$

Решение: Применяем правило дифференцирования сложной функции: $(\sin u)^{/} = \cos u \cdot u^{/}$ и имеем:

$$y^{/} = (\sin 10x)^{/} = \cos 10x \cdot (10x)^{/} = 10\cos 10x.$$

Ответ: $y^{/} = 10\cos 10x$

Задача 2(в). Найти производную функции: $y = \sin^2 x$.

Решение: Данная функция является сложной и её производная определится следующим образом:

$$y^{/} = (\sin^2 x)^{/} = 2\sin x(\sin x)^{/} = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x.$$

Ответ: $y^{/} = \sin 2x$.

Задача 3(а). Найти производную второго порядка от функции: $y = \cos^2 x$.

Решение: Находим первую производную:

$y' = (\cos^2 x)' = 2\cos x(-\sin x) = -2\cos x \cdot \sin x = -\sin 2x$.

Зная, что производной второго порядка называется производная от производной первого порядка, получаем:

$$y'' = (-\sin 2x)' = -\cos 2x \cdot (2x)' = -2\cos 2x$$

Ответ: $-2\cos 2x$

Задача 3(б). Точка движется по закону: *x=t–sint*. Определить мгновенные скорость и ускорение точки.

Решение: Мгновенная скорость точки характеризуется первой производной от смещения *x* по времени *t*: $V_{мгн} = x_t' = (t - \sin t)_t' = 1 - \cos t$. Мгновенное ускорение точки характеризуется второй производной от смещения *x* по времени *t* или первой производной от скорости по времени: $a_{мгн} = V_t' = (1-\cos t)_t' = \sin t$.

Ответ: $V_{мгн} = 1 - \cos t$; $a_{мгн} = \sin t$**.**

Задача 4. Определите зависимость градиента концентрации от координаты, если зависимость концентрации от координаты задана функцией: $C(x) = C_0 e^{-kx}$, где k - константа, а C_0 есть концентрация вещества при $x=0$.

Решение: Величина градиента концентрации определяется выражением $\frac{dC}{dx}$ и характеризует быстроту изменения концентрации при изменении координаты. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции: $(e^u)' = e^u \cdot u'$, в данном случае получим:

$\frac{dC}{dx} = C_0 e^{-kx}(-kx)' = -kC_0 e^{-kx}$.

Ответ: величина зависимости градиента концентрации от координаты

$$\frac{dC}{dx} = -kC_0 e^{-kx}.$$

Задача 5. Найти дифференциал функции: $y = x^5 \cdot 5^x$.

Решение: По определению $dy = y'dx$, т.е. чтобы найти дифференциал одной переменной, нужно найти производную $y'(x)$ и умножить её на дифференциал аргумента *dx*. Искомый дифференциал будет:

$$dy = (x^5 \cdot 5^x)' dx = \left[(x^5)' 5^x + x^5 (5^x)'\right] dx = \left[(5x^4 \cdot 5^x + x^5 \cdot 5^x \cdot \ln 5)\right] dx = x^4 \cdot 5^x (5 + x\ln 5) dx$$

Ответ: $dy = x^4 \cdot 5^x (5 + x\ln 5) dx$**.**

Задача 6.Найти полный дифференциал функции:

$$Z=3x^2y^3+8xy^2-3y+e^x.$$

Решение:

$$dz=\frac{\partial(3x^2y^3+8xy^2-3y+e^x)}{\partial x}dx+\frac{\partial(3x^2y^3+8xy^2-3y+e^x)}{\partial y}dy=$$
$$=(3y^3(x^2)'+8y^2x'-(3y)'_x+(e^x)')dx+(3x^2(y^3)'+8x(y^2)'-3y'+(e^x)'_y)dy=$$
$$=(3y^3\cdot 2x+8y^2+e^x)dx+(3x^2\cdot 3y^2+8x\cdot 2y-3)dy=$$
$$=(6xy^3+8y^2+e^x)dx+(9x^2y^2+16xy-3)dy$$

Применение понятия дифференциала для приближенных вычислений.

1. ***Степенная функция:*** $\boldsymbol{y=x^n=(x_0\pm\Delta x)^n}$, где $\boldsymbol{n}$ – любое действительное число.

$$(x\pm\Delta x)^n\approx x_0^n\pm n\cdot x_0^{n-1}\cdot\Delta x$$

Если $\boldsymbol{x_0}$=1, то

$$(1\pm\Delta x)^n\approx 1\pm n\cdot\Delta x$$

Задача 7: Вычислить $\sqrt[6]{67}$; $\sqrt[3]{1{,}2}$

Решение: $\sqrt[6]{67}=67^{\frac{1}{6}}=(64+3)^{\frac{1}{6}}\approx 64^{\frac{1}{6}}+\frac{1}{6}64^{-\frac{5}{6}}\cdot 3\approx\sqrt[6]{64}+\frac{1}{6}\frac{3}{\sqrt[6]{64^5}}\approx$

$$\approx 2+\frac{1}{2\cdot 32}\approx 2+0{,}016\approx 2{,}016$$

$$\sqrt[3]{1{,}2}=1{,}2^{\frac{1}{3}}=(1+0{,}2)^{\frac{1}{3}}\approx 1+\frac{1}{3}\cdot 0{,}2\approx 1+0{,}007\approx 1{,}07$$

Ответ: $\sqrt[6]{67}\approx 2{,}016$; $\sqrt[3]{1{,}2}\approx 1{,}07$

2. ***Показательная функция***: $\boldsymbol{y=a^x}$

$$a^{x_0\pm\Delta x}\approx a^{x_0}\pm a^{x_0}\cdot\ln a\cdot\Delta x$$

Задача: Вычислить $4^{2,1}$

Решение: $4^{2,1}=4^{2+0,1}\approx 4^2+4^2\ln 4\cdot 0{,}1\approx 16+16\cdot 1{,}48\cdot 0{,}1\approx 16+2{,}37\approx 18{,}37$

Ответ: $4^{2,1}\approx 18{,}37$

3. ***Функция натурального логарифма:*** $\boldsymbol{y=\ln x}$

$$\ln(x_0\pm\Delta x)\approx\ln x_0\pm\frac{1}{x_0}\cdot\Delta x$$

За $\boldsymbol{x_0}$ принимаем $\boldsymbol{e^n}\approx 2{,}7^n$ ($\boldsymbol{e^2}\approx 7{,}3$; $\boldsymbol{e^3}\approx 19{,}7$; $\boldsymbol{e^4}\approx 53{,}1$)

Если $\boldsymbol{x_0}$=1, то $ln(1\pm\Delta x)\approx\pm\Delta x$

Задача: Вычислить $\ln 4$; $\ln 1{,}27$; $\ln 0{,}87$.

Решение: $\ln 4 = \ln(2{,}7 + 1{,}3) \approx \ln 2{,}7 + \frac{1}{2{,}7} \cdot 1{,}3 \approx 1 + 0{,}48 \approx 1{,}48$

$$\ln 1{,}27 = \ln(1 + 0{,}27) \approx 0{,}27$$
$$\ln 0{,}87 = \ln(1 - 0{,}13) \approx -0{,}13$$

Ответ: $\ln 4 \approx 1{,}48$; $\ln 1{,}27 \approx 0{,}27$; $\ln 0{,}87 \approx -0{,}13$.

4. *Функция десятичного логарифма*: *y=lgx*

$$\lg(x_0 \pm \Delta x) \approx \lg x_0 + \frac{0{,}4343}{x_0} \cdot \Delta x$$

В качестве x_0 берется 10^n.

Задача: Вычислить $\lg 131$

Решение: $\lg 131 = \lg(100 + 31) = \lg 100 + \frac{0{,}4343}{100} \cdot 31 \approx 2 + 0{,}13 \approx 2{,}13$

Ответ: $\lg 131 \approx 2{,}13$.

5. *Тригонометрические функции*

1. Функция синуса: ***y=sinx***

$$\sin(x_0 \pm \Delta x) \approx \sin x_0 \pm \cos x_0 \cdot \Delta x, \quad \Delta x = 1^\circ = \frac{1^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{3{,}14}{180}$$

Задача: Вычислить $\sin 57^\circ$:

$$\sin 57^\circ = \sin(60^\circ - 3^\circ) \approx \sin 60^\circ + \cos 60^\circ \cdot (-3) \cdot \frac{3{,}14}{180} \approx$$

$$\approx \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 3{,}14}{180} \approx 0{,}865 - 0{,}026 \approx 0{,}839$$

Ответ: $\sin 57^\circ \approx 0{,}839$.

2. **Ф**ункция косинуса: ***y=cosx***

$$\cos(x_0 \pm \Delta x) \approx \cos x_0 \mp \sin x_0 \cdot \Delta x$$

Задача: Вычислить $\cos 34^\circ 30'$:

Решение:

$$\cos 34^\circ 30' = \cos 34{,}5^\circ = \cos(30^\circ + 4{,}5^\circ) \approx \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cdot 4{,}5 \cdot \frac{3{,}14}{180} \approx$$

$$\approx \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1 \cdot 4{,}5 \cdot 3{,}14}{2 \cdot 180} \approx 0{,}865 - 0{,}039 \approx 0{,}826$$

Ответ: $\cos 34^\circ 30' \approx 0{,}826$.

3. Функция тангенса: ***y=tgx***

$$tg(x_0 \pm \Delta x) \approx tgx_0 \pm \frac{1}{\cos^2 x_0} \cdot \Delta x$$

Задача: Вычислить $tg43^{\circ}$:

Решение: $tg43^{\circ} = tg(45^{\circ} - 2^{\circ}) \approx tg45^{\circ} + \frac{1}{\cos^2 45^{\circ}} \cdot (-2) \cdot \frac{3{,}14}{180} \approx 1 - \frac{2 \cdot 3{,}14}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot 180} \approx$

$\approx 1 - \frac{2 \cdot 3{,}14}{90} \approx 1 - \frac{3{,}14}{45} \approx 1 - 0{,}07 = 0{,}93$

Ответ: $tg43^{\circ} \approx 0{,}93$.

4. Функция котангенса: ***y=ctgx***

$$ctg(x_0 \pm \Delta x) \approx ctgx_0 \mp \frac{1}{\sin^2 x_0} \Delta x$$

Задача: Вычислить $ctg27^{\circ}$:

Решение: $ctg27^{\circ} = ctg(30^{\circ} - 3^{\circ}) = ctg30^{\circ} - \frac{1}{\sin^2 30^{\circ}} \cdot (-3) \cdot \frac{3{,}14}{180} \approx$

$\approx \sqrt{3} + \frac{3 \cdot 3{,}14 \cdot 4}{180} \approx 1{,}732 + \frac{3 \cdot 3{,}14}{45} \approx 1{,}942$

Ответ: $ctg27^{\circ} \approx 1{,}942$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Задачи для домашнего решения.

1. Найти производную функций:

а) $y = \frac{\cos x}{1 + 2\sin x}$; в) $y = \frac{(x^5 - 2) \cdot \sin x}{\ln x \cdot e^x}$;

б) $y = \frac{5x}{x + \ln x}$; г) $y = \sqrt{x^5} \cdot \sqrt[3]{x}$.

2. Найти производные следующих сложных функций:

а) $y = \sin 4x$; г) $y = 2^{x^2 + x^3}$;

б) $y = 4tg^3 3x$; д) $y = 5\cos^3(x^2 + 1)$;

в) $y = x^2 \cdot \ln(1 - 3x)$; е) $y = \cos^2 x + \cos^2 2x$.

3. Найти производную второго порядка функций:

а) $y = 5\ln(2x - 3)$; в) $y = 2e^{-x^2}$.

б) $y = 3\sin(t + \frac{\pi}{2})$;

4. Найдите скорость и ускорение точки, совершающей гармонические колебания по закону: $S = S_0 \sin(\omega t + \varphi)$ где ***S_0,ω,φ-const***.

5. При ламинарном течении крови по крупным сосудам её слои имеют различную скорость в зависимости от расстояния *x* от оси сосуда: $\vartheta(x) = \frac{\Delta P}{4\eta\ell}(R^2 - x^2)$, где ΔP-разность давления на участке сосуда длиной ℓ; R-радиус сосуда; *η*-коэффициент вязкости крови. Найдите величину градиента скорости на расстоянии *x* от оси сосуда.

6. Найти дифференциал следующих функций:

а) $y = tg^2\left(\frac{x}{3}\right)$; г) $y = 5^{\ln 5x}$;

б) $y = \sin^3 x \cdot \cos^2 x$; в) $y = e^{\sin} \cdot tgx$.

7. Найти полный дифференциал следующих функций:

а) $z = 3x^2y^5 - 8x^4 + \sin 2y$; б) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

8. Приближенно вычислить:

$\sqrt[5]{37{,}1}$; $\sqrt[7]{121}$; $\sqrt{0{,}97}$;

$3^{1{,}8}$; $12^{2{,}1}$;

ln15,1; ln8,4; ln0,79;

lg18,4; lg1032;

$\sin 63^\circ 15'$; $\cos 33^\circ$; $tg 61^\circ$; $ctg 52^\circ$.

Задачи для решения на практическом занятии

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = 3x^{-4} + 2x^{-3} + x^{-2} + x^{-1}$; в) $y = \frac{\ln x - 2}{\sqrt{x}}$.

б) $y = (3x + 2) \cdot (x^2 + 4x - 1)$;

2. Найти производные следующих сложных функций:

а) $y = ctg^2 4x$; г) $y = \frac{\sqrt{x - \sin x}}{\sqrt{\ln x}}$;

б) $y = x^2 \ln(1 - 2x)$; д) $y = \ln(\ln x)$;

в) $y = 2\cos x(\frac{\pi}{6} - 3x)$; е) $y = \sin 2^{x}$.

3. **а)** Найти производные второго порядка следующих функций:

а) $y = x\sqrt{1+x^2}$; в) $y = 3\cos^2 x$;

б) $y = \frac{\ln x}{x}$; г) $y = 8\cos\left(3t - \frac{\pi}{3}\right)$.

б) Уравнение движения точки имеет вид: $S(t) = 4 + 2t + t^2 + 0{,}2t^3$.

Определите мгновенную скорость и ускорение точки.

4. **а)** Зависимость между количеством x вещества, полученного в некоторой химической реакции, и временем t выражается уравнением: $x = A(1 + e^{-kt})$, где A, k - постоянные.

Определить скорость реакции.

б) Растворение лекарственных веществ из таблеток подчиняется уравнению: $C=C_0\, e^{-kt}$, где C - количество лекарственного вещества в таблетке, оставшееся ко времени растворения t;

C_0 - исходное количество лекарственного вещества в таблетке;

k -постоянная скорости растворения.

Определить скорость растворения лекарственных веществ из таблеток.

в) Рост числа бактерий подчиняется закону $f(t) = \frac{1000e^t}{1 + 0{,}1(e^t - 1)}$. Определить скорость роста числа бактерий.

г) Смещение в ответ на одиночное мышечное сокращение (единичный импульс) описывается уравнением: $y = te^{-\frac{t^2}{2}}$, $t \geq 0$.

Определить скорость и ускорение в зависимости от времени.

5. Найти дифференциалы следующих функций:

а) $y = \frac{e^{-3x}}{1 - x^3}$;

б) $y = \frac{1}{2}ctg^2 x + \ln\sin x$;

6. Найти полный дифференциал следующих функций:

а) $Z = tg(\frac{x}{y}) + ctg(\frac{x}{y})$;

б) $Z = 4x^3y^5 - x^2y^2 + e^{\cos x} - 4y^7$;

в) $Z = \ln x \cdot arctgy$.

7. Вычислить приближенно:

а) $\sqrt{27}$; $\sqrt[3]{84}$; $\sqrt[8]{1,47}$;

б) $2^{8,3}$; $5^{1,9}$; $3^{3,2}$;

в) ln1,18; ln 7,5; ln 38;

г) lg115; lg 1181.

ТЕМА №2

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

Умение применять производные к исследованию функций позволяет исследовать весь ход изменения функции и строить её график. При математических расчетах часто требуется определить максимальное значение функции, что часто используется при решении медико-биологических задач.

Цель занятия

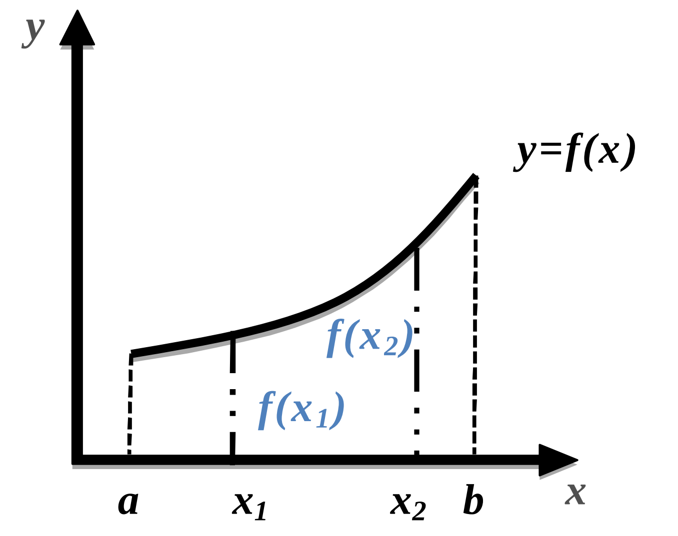
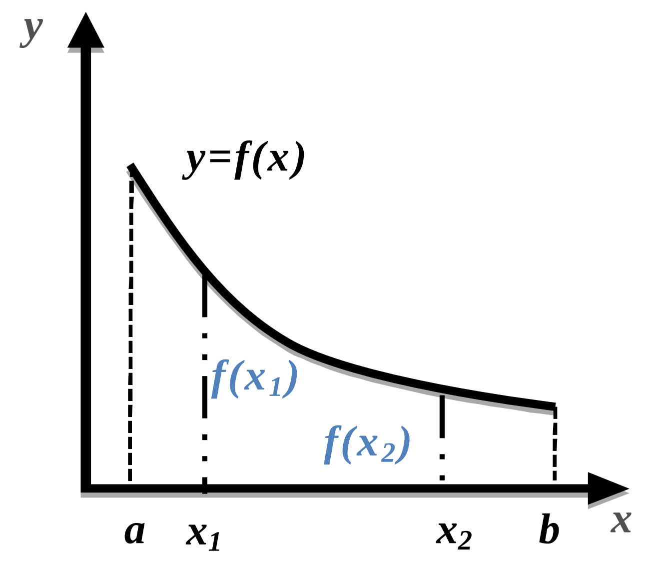
1. Научиться исследовать функции и строить их графики.
2. Использовать теорию экстремумов для решения прикладных задач.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИЙ НА ИНТЕРВАЛЕ

Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей [убывающей]** на некотором интервале ***]a, b[,*** если для любых точек x_1 и x_2, принадлежащих данному интервалу из неравенства $x_1 < x_2$, следует неравенство

$f(x_1) < f(x_2)$ [$f(x_1) > f(x_2)$]. Представим графики этих функций.

	
$x_1 < x_2$ $f(x_1) < f(x_2)$	$x_1 < x_2$ $f(x_1) > f(x_2)$
Рис 1. Возрастающая функция	*Рис 2. Убывающая функция*

Необходимые и достаточные условия возрастания и убывания дифференцируемой функции на интервале.

Теорема: Если дифференцируемая функция $\boldsymbol{y = f(x)}$ возрастает в данном интервале ***]a, b[***, то в любой точке этого интервала $\boldsymbol{f'(x) > 0}$**,**

Если дифференцируемая функция $\boldsymbol{y = f(x)}$ убывает в данном интервале ***]a, b[***, то в любой точке этого интервала $\boldsymbol{f'(x) < 0}$**;**

Если дифференцируемая функция $\boldsymbol{y = f(x)}$не изменяется в данном интервале ***]a, b[,*** то в любой точке этого интервала $\boldsymbol{f'(x) = 0}$**.**

Интервалы, на которых функция возрастает [убывает], называются **интервалами монотонности функции.**

Если производная $\boldsymbol{f'(x)}$ функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ непрерывна, то разделять интервалы монотонности могут лишь точки, в которых $\boldsymbol{f'(x) = 0}$, т. к. перемена знака непрерывной функции возможна лишь при переходе производной функции через нуль.

Теорема: Если производная $\boldsymbol{f'(x)}$ функции $\boldsymbol{f(x)}$ на интервале ***]a, b[*** положительна, то функция $\boldsymbol{f(x)}$ на этом интервале строго **возрастает**.

Если производная $\boldsymbol{f'(x)}$ функции $\boldsymbol{f(x)}$ на интервале ***]a, b[*** отрицательна, то функция $\boldsymbol{f(x)}$ на этом интервале строго **убывает**.

Если производная $\boldsymbol{f'(x)}$ функции $\boldsymbol{f(x)}$ на интервале ***]a, b[*** равна нулю, то функция $\boldsymbol{f(x)}$ на этом интервале **не изменяется**.

Правило исследования дифференцируемой функции на возрастание и убывание

Разберем это правило на примере:

$$y = x^2 \quad 2x \mid 5$$

1. Находим производную данной функции. Точки $f'(x) = 0$ разбивают область определения функции $y = f(x)$ на интервалы, в каждом из которых производная функции $f'(x)$ сохраняет знак.

$$y' = 2x \quad 2$$

Приравниваем производную к нулю:

$$2x - 2 = 0$$

$$2(x - 1) = 0$$

$$x \quad 1 = 0$$

$$x = 1$$

На числовой оси получаем два промежутка монотонности:

$] \quad \infty; 1[$ и $]1; \mid \infty[$.

2. Исследуется знак $f'(x)$ на каждом интервале.

Функция возрастает, если $y' > 0, x \quad 1 > 0, x > 1$.Т. о. в интервале $]1; +\infty[$ функция **возрастает.**

Функция убывает, если $y' < 0, x \quad 1 < 0, x < 1$. Т. о. в интервале $]-\infty; 1[$ функция **убывает**.

2. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим график произвольной функции$\boldsymbol{y = f(x)}$

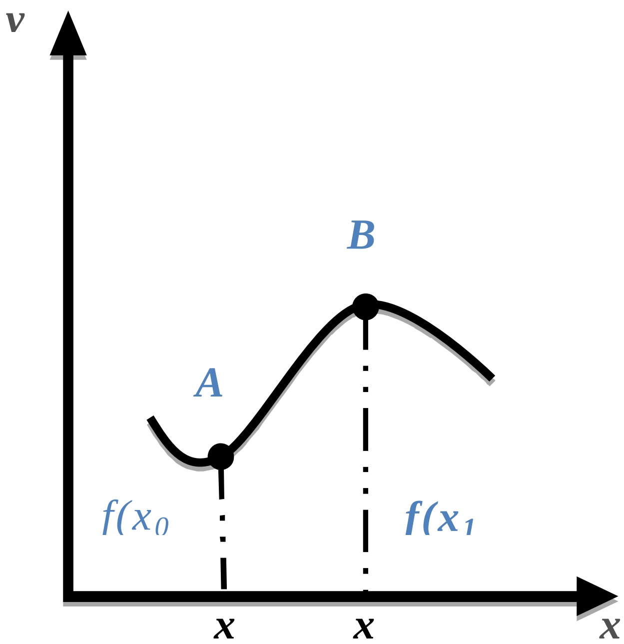


Рис 3. Экстремумы функции.

Точка ***A*** – точка минимума. Точка ***B*** – точка максимума.

Если существует такая двухсторонняя окрестность точки x_0, что для всякой точки $x \neq x_0$ этой окрестности имеет место неравенство

$f(x) > f(x_0)$,то точка x_0 называется точкой **минимума функции** $y = f(x)$, а число $f(x_0)$–**минимумом функции** $y = f(x)$.

Если для всякой точки $x \neq x_1$ некоторой окрестности точки x_1выполняется неравенство $f(x) < f(x_1)$, то точка x_1называется точкой **максимума функции** $y = f(x)$, а число $f(x_1)$ –**максимумом функции**.

Точка минимума или максимума называется **точкой экстремума**, а максимум или минимум функции – **экстремумом функции**.

Необходимые и достаточные условия существования экстремума дифференцируемой функции

Теорема: Если функция $\boldsymbol{f(x)}$, дифференцируемая на интервале ***]a, b[,*** имеет в точке $\boldsymbol{x_0} \in]\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}[$ экстремум, то ее производная в этой точке равна нулю:

$$\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$$ **(необходимое условие)**

Теорема: Если производная $\boldsymbol{f'(x)}$ функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ при некотором значении аргумента $\boldsymbol{x = x_0}$ равна нулю и при переходе аргумента через это значение меняет знак с плюса на минус, то при $\boldsymbol{x = x_0}$ функция имеет **максимум**; если при переходе аргумента через это значение производная меняет знак с минуса на плюс, то при

$\boldsymbol{x = x_0}$ функция имеет **минимум**. Если при переходе через точку $\boldsymbol{x_0}$ производная функции не меняет знака, то в этой точке функция $\boldsymbol{f(x)}$ экстремума не имеет **(достаточное условие).**

Правило исследования дифференцируемой функции на экстремумы с помощью первой производной

Рассмотрим данное правило на примере: $y = x^2 + 4x + 6$

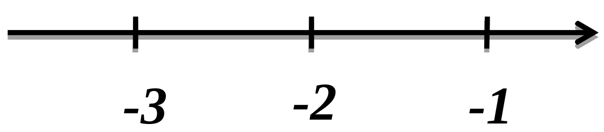
1. Находят производную функции: $y' = 2x + 4$.

2.Находят критическое значение аргумента, для чего $f'(x)$ приравнивают к нулю и получают действительные корни уравнения (если корни уравнения мнимые, то экстремума нет).

$$6x^2 - 6x = 0;$$
$$6x(x - 1) = 0$$
$$6x = 0; \qquad \boldsymbol{x_1 = 0}$$
$$x - 1 = 0; \qquad \boldsymbol{x_2} =$$

- критические точки

3. Критические значения аргумента располагают в возрастающем порядке. Определяют знаки производной для значений аргументов, расположенных правее и левее и близких к критическим точкам. Если знак производной меняется с (-) на (+), то данное значение аргумента является точкой минимума, если знак производной меняется с (+) на (-), то данное значение аргумента является точкой максимума.



$$y'_{x=-3} = (2x \mid 4)_{x=-3} = \quad 6 \mid 4 = \quad 2$$

$$y'_{x=-1} = (2x+4)_{x=-1} = -2+4 = 2$$

Знак производной изменился при переходе через критическую точку с (-) на (+), значит точка x=-2 – это **точка минимума**.

4. Вычисляют значение функции в точках максимума и минимума: $\boldsymbol{Y_{max}}$, $\boldsymbol{Y_{min}}$.

В нашем случае:

$f(-2)_{min} = (x^2+4x+6)_{x=-2} = 4-8+6 = 2$

Данное правило исследования функции на экстремумы можно представить в виде следующей таблицы:

Критическое значение аргумента	Знаки производной $f'(x)$, при переходе через критическую точку $x=x_0$			Характер критической точки	$f(x_0)$
x_0	$x<x_0$	$x=x_0$	$x>x_0$		
x_1	-	0	+	Min	$f(x_1)$min
x_2	+	0	-	Max	$f(x_2)$max
x_3	-	0	-	Нет экстремума	
x_4	+	0	+	Нет экстремума	

Правило исследования дифференцируемой функции на экстремум с помощью производной второго порядка

Если при данном критическом значении аргумента вторая производная окажется отрицательной, то при этом значении аргумента функция имеет максимум. Если вторая производная окажется положительной, то при этом значении аргумента функция имеет минимум.

Если при данном критическом значении вторая производная обращается в 0 или в бесконечно большую величину, то исследование функции на экстремум ведется с помощью первой производной.

Например: $y = 2x^3 - 3x^2$

1. Находим первую производную: $y' = 6x^2 - 6x$
2. Находим критические точки:

$$6x^2 - 6x = 0;$$

$$6x(x-1) = 0$$

$6x = 0;\quad \boldsymbol{x_1 = 0}$

$x - 1 = 0;\quad \boldsymbol{x_2 =}$ **- критические точки**

3. Находим вторую производную: $y'' = (y')' = 12x - 6$;

4. Во вторую производную подставляем критические точки:

$y''_{x=0} = (12x - 6)_{x=0} = -6 \ \ (max)$

$y''_{x=1} = (12x \quad 6)_{x=1} = 6 \ \ (min)$

3. ВЫПУКЛОСТЬ И ВОГНУТОСТЬ ФУНКЦИИ. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Кривая $\boldsymbol{y = f(x)}$ **выпукла** в интервале $]\boldsymbol{a, b}[$, если при всех значениях аргумента $\boldsymbol{x}$ этого интервала вторая производная отрицательна.

Кривая $\boldsymbol{y = f(x)}$ **вогнута** в интервале $]\boldsymbol{a, b}[$, если при всех значениях аргумента $\boldsymbol{x}$ этого интервала вторая производная положительна.

Точка на непрерывной кривой, отделяющая участок выпуклости от участка вогнутости, называется **точкой перегиба**.

Например:

Исследовать функцию на выпуклость и вогнутость: $y = x^3 + 2x$.

Находим $y'' = (3x^2 + 2)' = 6x$

Кривая **выпукла** ,если $y'' < 0$

$y'' = 6x < 0; \quad x < 0$

Т. о. кривая выпукла в интервале $]-\infty, 0[$.

Кривая **вогнута** , если $y'' > 0$

$y'' = 6x > 0; x > 0$

Таким образом, кривая вогнута в интервале $]0, +\infty[$.

Эталоны решения типовых задач

Задача №1. Построить график функции $y=x^3-3x$.

При построении графиков функций удобно действовать по следующей схеме:

1. найти область определения функции;
2. установить, обладает ли функция симметрий (исследовать функцию на четность);
3. исследовать функцию на непрерывность, периодичность;
4. рассмотреть поведение функции в окрестностях точек разрыва;
5. определить поведение функции в бесконечности;

6. найти точки пересечения графика функции с осями координат, если это возможно (хотя бы приближенно);
7. найти интервалы возрастания, убывания и точки экстремума функции;
8. определить точки перегиба;
9. определить интервалы выпуклости и вогнутости;
10. составить сводную таблицу и построить график.

В ходе построения графика по мере необходимости можно получить дополнительно ряд значений функции при некоторых частных значениях аргумента *x*, т.е. еще ряд точек графика. Разумеется, в процессе исследования функции не обязательно строго придерживаться приведенной схемы, иногда даже удобно изменить порядок действий.

Решение.

1. Функция определена при всех $x \in]-\infty,+\infty[$.
2. На концах интервала $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3-3x)=-\infty;$ $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3-3x)=+\infty,$
3. Определим интервалы возрастания и убывания функции. Функция возрастает на интервале, если $f'(x)>0$. В данном случае $f'(x)=3x^2-3>0$, если $x^2>1$ или $|x|>1$. Следовательно, функция $y=x^2-3x$ **возрастает** на интервалах $]-\infty,-1[$ и $]1,+\infty[$. Функция убывает на интервале, если $f'(x)<0$: $3x^2-3<0$, откуда $x^2<1$, или $-1<x<1$. Следовательно, функция $y=x^3-3x$ **убывает** на интервале]-1, 1[.

4. Определим критические точки и исследуем их характер. Из условия $f'(x)=3x^2-3=0$ найдем критические точки: $x_1=-1$, $x_2=1$. Определим знак первой призводной в окрестностях точек $x_1=-1$, $x_2=1$. Для точки $x_1=-1$ имеем $f'(\ \ 2) = 3\cdot(\ \ 2^2)\ \ \ 3 > 0$, $f'(x)=3\cdot0^2-3<0$. Так как знак производной при переходе через критическую точку x=-1 изменился с плюса на минус, то ***x=-1* это точка максимума.** Максимум функции $f(-1)=(-1)^3-3(-1)=2$ (точка *A* на *рис. 4*). Для точки $x_2=1$ имеем $f'(0) < 0$, $f'(2) = 3\cdot 2^2\ \ \ 3 > 0$. Так как знак производной при переходе через критическую точку изменился с минуса на плюс, то ***x=1* это точка минимума**. Минимум функции $f'(1) = 1^2 - 3\cdot 1 = -2$ (точка В на *рис. 4)*.
5. Определим точку перегиба: $f''(x) = 6x = 0$, $x = 0$. Ордината точки перегиба $f(0)=0^3-3\cdot0=0$ (точка *O* на *рис. 4*).

6. Определим интервалы выпуклости и вогнутости. Кривая выпукла при условии $f''(x) = 6x < 0$, откуда $x<0$. Следовательно, кривая **выпукла на интервале** $]-\infty,0[$. Кривая вогнута при условии $f''(x) = 6x > 0$, откуда $x>0$. Следовательно, кривая **вогнута на интервале** $]0,+\infty[$.

7. Найдем точки пересечения кривой с осью Ox.Из системы уравнений $\left.\begin{array}{l} y = x^3 - 3x \\ y = 0 \end{array}\right\}$ находим точки пересечения:

$$M_1(-\sqrt{3};\ 0);\ O(0;\ 0),\ M_2(\sqrt{3};\ 0).$$

8. Сведем результаты исследования в таблицу:

x	-1	0	1	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$f(x)$	2	0	-2	0	0
$f'(x)$	0	-3	0		
$f''(x)$	-6	0	6		
Характер точки	Максимум	Перегиб	Минимум		

9. Строим график функции $y=x^3-3x$

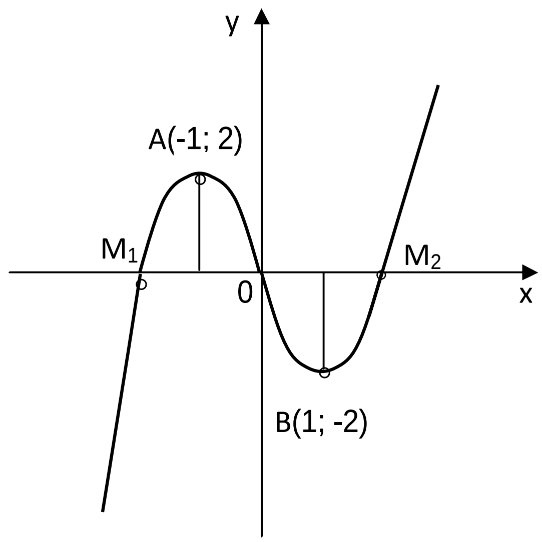


Рис 4. График функции $y=x^3$-3x.

Задача 2. Установить, при каком процентом содержании y кислорода в газовой смеси скорость окисления азота будет максимальной, если уравнение кинетики имеет вид $\vartheta = k(100x^2 - x^3)$, где k-постоянная, x-концентрация окиси азота и $x+y=100$.

Решение. Найдем производную функции ϑ и приравняем ее нулю: $\vartheta' = k(200x - 3x^2) = 0$, откуда критические точки $x_1=0$, $x_2=200/3$. Исследуем точку $x_1=0$: $\vartheta'_{x<0} < 0$, $\vartheta'_{x>0} > 0$. В точке $x_1=0$ функция ϑ имеет минимум. Исследуем точку $x_2=200/3$: $\vartheta'_{x<200/3} > 0$, $\vartheta'_{x>200/3} < 0$. Следовательно, $x_2=200/3$ – точка максимума функции ϑ, и поэтому $y_2=100-200/3=33,3$. Скорость окисления будет максимальной в том случае, когда в смеси будет содержаться 33,3% кислорода.

Задача 2 . Реакция организма на введенный лекарственный препарат может выражаться в понижении температуры, повышении давления и т.д. Степень реакции зависит от назначенной дозы лекарства. Пусть x обозначает дозу назначенного лекарственного препарата, а степень реакции описывается функцией $y=f(x)=x^2(a-x)$, где a-положительная постоянная. При каком значении x реакция максимальна?

Решение. Найдем производную функции и приравняем ее к нулю: $f'(x) = 2ax - 3x^2 = 0$, откуда критические точки $x_1=0$, $x_2=2a/3$.

Значение $x_1=0$ указывает на то, что в организм лекарство не вводилось. Исследуем точку $x_2=2a/3$: $f'_{x<x_2} > 0$, $f'_{x>x_2} < 0$. Следовательно, в точке $x_2=2a/3$ функция имеет максимум. Таким образом, $x=2a/3$ – это доза, которая вызывает максимальную реакцию.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Задачи для домашнего решения

1. Построить графики функций:

   а) $y = x^2 + x + 1$;　　г) $y = 2x^2 - 6x + 3$;

   б) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$;　　д) $y = x^3 - 5x^2 + 8x$;

   в) $y = 2x^3 - 3x^2$;　　е) $y = x^3 - 6x^2 + 12x$;

2. Известно, что если полимерные молекулы образуются путем рекомбинации, то мольная доля y молекулы полимера с числом звеньев x имеет вид $y = \dfrac{|1-\alpha|}{2-\alpha}(x+1)\alpha^x - 1$, где α-постоянная. Найти максимум распределения по молекулярным массам.

3. При построении математической модели хлорирования органических соединений получают следующую функциональную зависимость между концентрацией y

монохлорзамещенных продуктов и концентрацией x нехлорированного сырья: $y=\frac{a^{1-k}}{1-k}x^k-\frac{x}{1-k}$, где постоянная $k\neq 1$, a-начальная концентрация хлорируемого продукта. Найти максимум функциональной зависимости.

Задачи для решения на практических занятиях:

1. Построить графики функций.

   а) $y=x(2-x)^2$; г) $y=x^3-\frac{x^4}{4}$

   б) $y=4x-\frac{x^3}{3}$; д) $y=3x-x^3$;

   в) $y=2x^2-\frac{x^4}{4}$.

2. Растворение лекарственных веществ из таблеток подчиняется уравнению: $c=c_0e^{-kt}$, где c_0-исходное количество лекарственного вещества в таблетке, c-количество лекарственного вещества в таблетке, оставшегося ко времени растворения t, k-постоянная скорости растворения. Построить график функции $c(t)$ для $t\geq 0$.
3. В питательную среду вносят 1000 бактерий. Численность y бактерий возрастает согласно уравнению $y=1000+1000t/(100+t^2)$,где t-время, (в часах). Определить максимальное количество бактерий.
4. Реакция организма на два лекарственных препарата выражается соответственно функциями $f_1(t)=te^{-t}$ и $f_2(t)=t^2e^{-t}$. Определить максимальные реакции на оба препарата и сравнить их.

ТЕМА №3

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Интегральное исчисление является составной частью математического анализа и применяется при решении многих задач химии, биологии именно в тех случаях, когда по известной производной требуется найти вид самой функции.

Цель занятия:

1. Научиться находить интегралы методом непосредственного интегрирования.
2. Научиться находить интегралы методом подстановки.
3. Научиться находить интегралы методом интегрирования по частям.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Процесс дифференцирования, т.е. нахождение производной или дифференциала функции, с физической точки зрения сводится к следующему: зная закон движения материальной системы, определить мгновенное значение скорости в данной точке траектории её движения. С геометрической точки зрения, этот процесс состоит в нахождении $tg\alpha$ угла наклона касательной, проведённой к графику функции в данной точке.

Но часто ставится и обратная задача, т. е. необходимо определить закон движения материальной системы, зная её скорость, или по $tg\alpha$ угла наклона касательной найти соответствующую функцию. Для решения этой задачи вводится понятие неопределённого интеграла, а сам процесс решения называется интегрированием.

Другими словами: если процесс дифференцирования состоит в нахождении производной данной функции, то ***процесс интегрирования - это нахождение функции по её производной или дифференциалу.***

Найти интеграл значит найти первообразную функции F(x) и сложить её с произвольной постоянной интегрирования C:

$$F(x)+C.$$

Таким образом, каждый неопределенный интеграл имеет бесчисленное множество решений или семейство первообразных.

Функция F(x), имеющая функцию *f(x)* своей производной или *f(x)dx* своим дифференциалом, называется первообразной данной функции:

$$F^{/}(x)=f(x);$$

$$dF(x) = f(x)\,dx.$$

Неопределенный интеграл в общем виде записывается:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где ∫-знак неопределённого интеграла,

f(x) - подинтегральная функция,

f(x)dx - подинтегральное выражение,

F(x) – первообразная функция

C – произвольная постоянная интегрирования

F(x)+C–решение неопределенного интеграла или семейство первообразных.

2. *СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА*

1. Производная от неопределённого интеграла равна подинтегральной функции:

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x).$$

2. Дифференциал от неопределённого интеграла равен подинтегральному выражению:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

3. Интеграл от дифференциала первообразной функции равен самой первообразной, сложенной с произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

4. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$; где ***a-const***

5. Интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов этих функций:

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)dx.$$

3. ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. $\int dx = x + C;$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1);$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

10. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C;$

11. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C;$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;$

5. $\int e^x dx = e^x + C;$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C;$

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C;$

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C;$

13. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C;$

14. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + C;$

15. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\dfrac{a+x}{a-x} + C;$

16. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\dfrac{x-a}{x+a} + C;$

17. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C.$

4. ПРОСТЕЙШИЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1. Метод непосредственного интегрирования

Метод непосредственного интегрирования основан на преобразовании подинтегральной функции, применении свойств неопределённого интеграла и приведении подинтегрального выражения к табличной форме.

Например:

1) $\int x^2(x-1)^2dx = \int x^2(x^2-2x+1)dx = \int\left(x^4-2x^3+x^2\right)dx = \int x^4dx - 2\int x^3dx + \int x^2dx =$

$$= \frac{x^5}{5} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C = x^3\left(\frac{x^2}{5} + \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right) + C$$

Проверка (на основании свойства №2 неопределённого интеграла):

$$d\left(x^3\left(\frac{x^2}{5}+\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)+C\right) = d\left(\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}\right)+C\right) = \left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}\right)' dx + C'dx =$$

$$= \left(5\frac{x^4}{5} + 4x^3\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 3x^2\right)dx = \left(x^4-2x^3+x^2\right)dx = x^2(x^2-2x+1)dx = x^2(x-1)^2dx$$

2) $\int \dfrac{2x^5-8x^4+3x}{x}dx = \int\left(\dfrac{2x^5}{x} - \dfrac{8x^4}{x} + \dfrac{3x}{x}\right)dx = \int\left(2x^4-8x^3+3\right)dx =$

$$= 2\int x^4dx - 8\int x^3dx + 3\int dx = 2\frac{x^5}{5} - 8\frac{x^4}{4} + 3x + C = \frac{2}{5}x^5 - 2x^4 + 3x + C$$

Проверка (на основании свойства №1 неопределённого интеграла):

$$\left(\frac{2}{5}x^5 - 2x^4 + 3x + C\right)' = \frac{2}{5}\left(x^5\right)' - 2\left(x^4\right)' + 3x' + C' =$$

$$=\frac{2}{5}\cdot 5x^4-2\cdot 4x^3+3=2x^4-8x^3+3=\frac{2x^5-8x^4+3x}{x}$$

2. *Метод подстановки (замены переменной)*

Этот метод основан на введении новой переменной. В интеграле $\int f(x)dx$ сделаем подстановку:

$$x=\varphi(t)\text{, тогда}$$

$$f(x)=f(\varphi(t));$$

$$dx=\varphi'(t)dt;$$

Следовательно, получим:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Например:

1) $$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^4}}=\left|\begin{array}{l}1-x^4=t\\ d\left(1-x^4\right)=dt\\ \left(1-x^4\right)'dx=t'dt\\ -4x^3dx=dt\\ x^3dx=-\dfrac{dt}{4}\end{array}\right|=-\int\frac{dt}{4\sqrt{t}}=-\frac{1}{4}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=-\frac{1}{4}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{\left(-\frac{1}{2}+1\right)}+C=-\frac{1}{4}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{t}+C=-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^4}+C$$

Проверка: $$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^4}+C\right)'=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^4}}\left(1-x^4\right)'=-\frac{1}{4\sqrt{1-x^4}}\left(-4x^3\right)=\frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}$$

2) $$\int e^{x^6}x^5dx=\left|\begin{array}{l}x^6=t\\ d\left(x^6\right)=dt\\ \left(x^6\right)'dx=t'dt\\ 6x^5dx=dt\\ x^5dx=\dfrac{dt}{6}\end{array}\right|=\int e^t\frac{dt}{6}=\frac{1}{6}\int e^tdt=\frac{1}{6}e^t+C=\frac{1}{6}e^{x^6}+C$$

Проверка (на основании свойства №2 неопределённого интеграла):

$$d\left(\frac{1}{6}e^{x^6}+C\right)=\left(\frac{1}{6}e^{x^6}+C\right)'dx=\frac{1}{6}e^{x^6}\left(x^6\right)'dx=\frac{1}{6}e^{x^6}6x^5dx=e^{x^6}x^5dx$$

3. *Интегрироване по частям*

Пусть ***u*** и ***v*** - дифференцируемые функции. Раскроем дифференциал произведения этих функций:

$$d(u\cdot v)=vdu+udv,$$

откуда $udv = d(uv) - vdu;$

Проинтегрируем полученное выражение:

$$\int d(uv) = \int vdu + \int udv;$$

Тогда

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu;$$

или

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Например:

1. $$\int \ln x \cdot x^3 dx = \left| \begin{array}{ll} U = \ln x; & d\vartheta = x^3 dx; \\ dU = (\ln x)' dx; & \int d\vartheta = \int x^3 dx; \\ dU = \frac{1}{x} dx; & \vartheta = \frac{x^4}{4}. \end{array} \right| = \frac{x^4}{4} \cdot \ln x -$$

$$-\int \frac{x^4}{4} \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{4}\left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + C$$

Проверка (на основании свойства №1 неопределённого интеграла):

$$\left(\frac{x^4}{4}\left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + C\right)' = \left(\frac{x^4}{4}\left(\ln x - \frac{1}{4}\right)\right)' + C' = \left(\frac{x^4}{4}\right)'\left(\ln x - \frac{1}{4}\right) +$$

$$+\left(\frac{x^4}{4}\right)\left(\ln x - \frac{1}{4}\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3\left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} = x^3 \ln x - \frac{x^3}{4} + \frac{x^3}{4} = x^3 \ln x$$

2) $$\int arctgx \cdot dx = \left| \begin{array}{ll} arctgx = U; & dx = d\vartheta; \\ (arctgx)' dx = dU; & \int dx = \int d\vartheta; \\ \frac{1}{1+x^2} dx = dU; & x = \vartheta. \end{array} \right| = arctgx \cdot x - \int x \cdot \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= arctgx \cdot x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$$

Решаем $\int x\cdot\frac{dx}{1+x^2}=\left|\begin{array}{l}1+x^2=t\\ d(1+x^2)=dt\\ (1+x^2)'dx=dt\\ 2xdx=dt\\ xdx=\frac{dt}{2}\end{array}\right|=\int\frac{dt}{2t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+C$

Проверка (на основании свойства №1 неопределённого интеграла):

$$\left(x\cdot arctgx-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C\right)'=x'\cdot arctgx+(arctgx)'\cdot x-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}(1+x^2)'=arctgx+\frac{x}{1+x^2}-\frac{2x}{2\left(1+x^2\right)}=arctgx$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Задачи для домашнего решения

Найти интеграл:

I. Метод непосредственного интегрирования

а) $\int\left(\frac{x^3}{2}+2x^4-\frac{1}{x^6}\right)dx$;

б) $\int\frac{\sin 2xdx}{\cos x}$;

в) $\int x^3(x+3)\,dx$;

г) $\int\frac{x^8-2x^4+8x}{x^2}dx.$;

д) $\int\frac{(x-2)^3}{x}dx$;

е) $\int\left(\sin x-e^x\right)dx$;

ж) $\int\left(x^5-7\right)^2dx$;

з) $\int\left(2\arcsin x+\frac{5}{\cos^2 x}\right)dx$;

и) $\int\frac{3\sqrt{x}-8x^4}{x}dx$;

к) $\int\frac{3\sin^2 x-4}{\sin^2 x}dx.$

II. Метод подстановки (замены переменной)

а) $\int\frac{xdx}{1-x^2}$;

б) $\int e^{x^5}\cdot x^4dx$;

в) $\int\sin 5xdx$;

е) $\int\left(x^3-1\right)^7x^2dx$;

ж) $\int\frac{dx}{x\cdot\ln x}$;

з) $\int\cos(3x+4)dx$;

г) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$;

и) $\int \frac{\cos x}{\sin^5 x}dx$;

д) $\int tgx\,dx$;

к) $\int x^3\sqrt{\left(x^4-2\right)}dx$.

III. Метод интегрирования по частям

а) $\int x\cdot e^x dx$;

в) $\int \ln x\cdot x^3 dx$;

д) $\int (x-3)e^x dx$

б) $\int x^2\sin xdx$;

г) $\int \arcsin xdx$;

е) $\int x\cdot\cos xdx$

Задачи для решения на практических занятиях:

I. Метод непосредственного интегрирования

а) $\int\left(x^3+2e^x+tgx\right)dx$;

ж) $\int\frac{(2x+1)^2}{x}dx$;

б) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx$;

з) $\int (x-1)^3dx$;

в) $\int\left(\frac{8}{\sqrt{x}}-\frac{2\sqrt{x}}{3}\right)dx$;

и) $\int x\left(x^5+8\right)dx$;

г) $\int\frac{3x^2-8x^2+5}{x^2}dx.$;

к) $\int\frac{x+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx$;

д) $\int\frac{\cos^3 x}{1-\sin^2 x}dx$;

л) $\int\frac{e^{2x}-7e^x}{e^x}dx$;

е) $\int\left(\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{2}+\cos x\right)dx$;

м) $\int (x-1)\left(x^3+2\right)dx.$

II. Метод подстановки (замены переменной)

а) $\int\frac{\sqrt{\ln}}{x}dx$;

ж) $\int\frac{\ln^3 x}{x}dx$;

б) $\int\frac{\sin 3x}{1+\cos 3x}dx$;

з) $\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1+2x^6}}$;

в) $\int e^x\sqrt{4-e^x}dx$;

и) $\int x^3\cos 2x^4dx$;

г) $\int\frac{e^{ctgx}}{\sin^2 x}dx$;

к) $\int\left(\sin\frac{x}{3}+\cos 5x\right)dx$;

д) $\int e^{\cos 2x}\sin 2xdx$;

л) $\int\frac{dx}{x(1-\ln x)}$;

е) $\int\frac{7\sin x}{\cos^5 x}dx$;

м) $\int e^{x^3}\cdot x^2dx.$

III. Метод интегрирования по частям

а) $\int \ln x dx$;

б) $\int x \cdot e^{-x} dx$;

в) $\int x \cdot \cos x dx$;

г) $\int arcctgx dx$;

д) $\int x \cdot \sin 3x dx$;

е) $\int x^5 \ln x dx$;

ж) $\int \arccos x dx.$

ТЕМА №4

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

При математических расчётах часто требуется найти приращение первообразной функции при изменении её аргумента в заданных пределах. Такую задачу приходится решать при вычислении площадей и объёмов различных фигур, при определении среднего значения функции, при вычислении работы переменной силы. Эти задачи могут быть решены вычислением соответствующих определённых интегралов.

Цель занятия:

1. Научиться вычислять определённый интеграл с помощью формулы Ньютона-Лейбница.
2. Уметь применять понятие определённого интеграла для решения прикладных задач.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА И ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Рассмотрим задачу о нахождении площади криволинейной трапеции.

Пусть дана некоторая функция ***y=f(x),*** график которой изображён на рисунке.

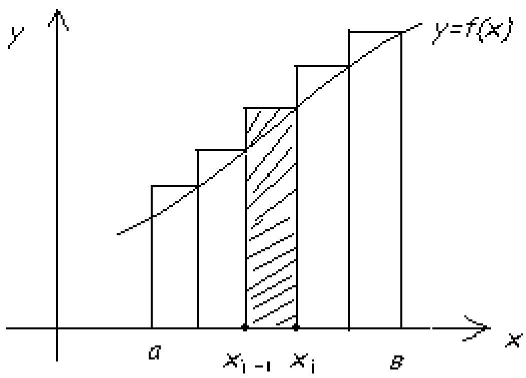


Рис 1. Геометрический смысл определенного интеграла.

На оси ***0x*** выберем точки ***“а”*** и ***“в”*** и восстановим из них перпендикуляры до пересечения с кривой. Фигура ограниченная кривой, перпендикулярами и осью ***0x*** называется криволинейной трапецией. Разобьём интервал $]a,в[$ на ряд небольших отрезков. Выберем произвольный отрезок $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Достроим криволинейную трапецию, соответствующую этому отрезку до прямоугольника. Площадь такого прямоугольника определится как:

$$S_i = f(x_i)\Delta x_i .$$

Тогда площадь всех достроенных прямоугольников в интервале $]a,в[$ будет равна:

$$S_{np} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \ ;$$

Если каждый из отрезков достаточно мал и стремится к нулю, то суммарная площадь прямоугольников будет стремиться к площади криволинейной трапеции:

$$S = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \ ;$$

Итак, задача о вычислении площади криволинейной трапеции сводится к определению предела суммы.

Интегральная сумма есть сумма произведений приращения аргумента на значение функции ***f(x)***, взятой в некоторой точке интервала, в границах которого изменяется аргумент. Математически задача о нахождении предела интегральной суммы, если приращение независимой переменной стремится к нулю, приводит к понятию определённого интеграла.

Функция ***f(x)*** в некотором интервале от ***x=a*** до ***x=в*** интегрируема, если существует такое число, к которому стремится интегральная сумма при ***Δx→0***. В этом случае число ***J*** называют ***определённым интегралом*** функции ***f(x)*** в интервале $]a,в[$:

$$J = \int_{a}^{в} f(x)dx;$$

$$\int_{a}^{в} f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \ ;$$

где]***a, в*****[** – область интегрирования,

a–нижний предел интегрирования,

в–верхний предел интегрирования.

Таким образом, с точки зрения геометрии, определённый интеграл есть площадь фигуры, ограниченной графиком функции в определённом интервале]***a, в***[и осью абсцисс.

2. СВЯЗЬ МЕЖДУ ОПРЕДЕЛЁННЫМ И НЕОПРЕДЕЛЁННЫМ ИНТЕГРАЛАМИ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

Неопределённый интеграл - это совокупность первообразных функций.

Определённый интеграл - это число. Связь между ними задаётся формулой Ньютона-Лейбница.

<u>Теорема.</u> Значение определённого интеграла равно разности значений любой первообразной от подинтегральной функции, взятой при верхнем и нижнем пределами интегрирования:

$$\int_a^в f(x)dx = F(x)\Big|_a^в = F(в) - F(a)$$

Например: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\,xdx = -cos\,x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(cos\frac{\pi}{2} - cos0\right) = -(0-1) = 1.$

3. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Определённый интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^в f(x)dx = \int_a^в f(y)dy = \int_a^в f(t)dt = \ldots;$$

2. Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций $f_1(x),\ \ f_2(x),\ldots,f_n(x)$, заданных на отрезке $]a,в[$ равен алгебраической сумме определённых интегралов от слагаемых функций:

$$\int_a^в (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^в f_1(x)dx \pm \int_a^в f_2(x)dx;$$

3. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int_a^в kf(x)dx = k\int_a^в f(x)dx; \qquad\qquad k = const$$

4. Если верхний и нижний пределы интегрирования поменять местами, то определённый интеграл изменит свой знак на противоположный:

$$\int_a^в f(x)dx = -\int_в^a f(x)dx;$$

5. Если ***a=в,*** то $\int_a^в f(x)dx = 0$;

6. Если отрезок интегрирования $]a,в[$ разбить на две части $]a,c[$ и $]c,в[$, то:

$$\int_a^в f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^в f(x)dx;$$

7. Если подинтегральная функция на отрезке интегрирования сохраняет постоянный знак, то интеграл представляет собой число того же знака, что и функция, т.е. если $f(x) \geq 0$, то

$$\int_a^в f(x)dx \ge 0;$$

8. Значение определённого интеграла заключено между произведениями наибольшего и наименьшего значений подинтегральной функции на длину интервала интегрирования:

   $\mathrm{m}(\text{в} - \text{а}) < \int_a^в f(x)dx < M(\text{в} - \text{а})$, где ***M,m*** – наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $]a,в[$: $\boldsymbol{m \le f(x) \le M.}$

9. Определённый интеграл от непрерывной функции равен произведению значения этой функции в некоторой промежуточной точке ***x=C*** отрезка интегрирования $]a,в[$ на длину отрезка (***в-а)***:

$$\int_a^в f(x)dx = f(c)(в - a),$$

где ***f(c)*** - среднее значение функции в интервале.

4. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Метод непосредственного интегрирования

$$\int_1^2 x(x-2)^2\,dx = \int_1^2 x(x^2-4x+4)dx = \int_1^2 (x^3-4x^2+4x)dx = \int_1^2 x^3dx - 4\int_1^2 x^2dx + 4\int_1^2 xdx =$$

$$= \frac{x^4}{4}\bigg|_1^2 - 4\frac{x^3}{3}\bigg|_1^2 + 4\frac{x^2}{2}\bigg|_1^2 = \frac{1}{4}\left(2^4-1^4\right) - \frac{4}{3}\left(2^3-1^3\right) + 2\left(2^2-1^2\right) = \frac{1}{4}(16-1) - \frac{4}{3}(8-1) + 2(4-1) =$$

$$= \frac{15}{4} - \frac{28}{3} + 2\cdot 3 = \frac{45-112+72}{12} = \frac{5}{12}$$

2. Метод подстановки

$$\int_{-1}^{2} \frac{x^2dx}{2+x^3} = \left| \begin{array}{l} 2+x^3 = t \\ 3x^2dx = dt \\ x^2dx = \dfrac{dt}{3} \\ t_в = 2+2^3 = 10 \\ t_н = 2+(-1)^3 = 1 \end{array} \right| = \int_1^{10} \frac{dt}{3t} = \frac{1}{3}\int_1^{10} \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln t\bigg|_1^{10} = \frac{1}{3}\left(\ln 10 - \ln 1\right) \approx \frac{1}{3}\cdot 2{,}37 \approx 0{,}79$$

Примечание: При вычислении интеграла методом постановки переходим к новым пределам интегрирования для переменной ***t***.

Метод интегрирования по частям

$$\int_1^3 \ln x\cdot x^4dx = \left| \begin{array}{ll} \ln x = u; & x^4dx = d\vartheta; \\ d(\ln x) = du; & \int x^4dx = \int d\vartheta; \\ (\ln x)'dx = u'du; & \dfrac{x^5}{5} = \vartheta. \\ \dfrac{1}{x}dx = du; & \end{array} \right| = \ln x\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_1^3 - \int_1^3 \frac{x^5}{5}\cdot\frac{1}{x}dx = \left(\frac{1}{5}\ln x\cdot x^5 - \frac{1}{5}\cdot\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\ln 3\cdot 3^5 - \ln 1\cdot 1^5\right) - \frac{1}{25}\left(3^5 - 1^5\right) \approx \frac{1}{5}\left(1{,}11\cdot 243 - 0\right) - \frac{1}{25}\left(243 - 1\right) \approx 53{,}95 - 9{,}68 \approx 44{,}27$$

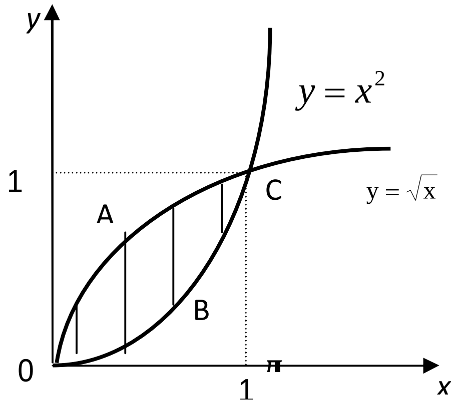
Вычисление площадей фигур, ограниченных линиями, уравнения которых заданы

Например: Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями:

$y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$.

Решение: Представим искомую площадь графически.

Искомая площадь площадь фигуры ОАСВ – заштрихована.



Находим точки пересечения линий: $\sqrt{x} = x^2$, откуда $x^4 - x = 0$ или $x(x^3 - 1) = 0$. Следовательно, абсциссы точек пересечений линий $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, а сами точки пересечения имеют координаты (0,0) и (1,1).

В соответствии с геометрической интерпретацией определённого интеграла, определённый интеграл функции $y = f(x)$ в пределах от $x=x_1$ до $x=x_2$, т.е. $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$, численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной линией графика функции $y=f(x)$, осью абсцисс и линиями $x=x_1$ и $x=x_2$. Искомая площадь S_{OACB} равна разности площадей криволинейных трапеций:

$$S_{OACB} = S_{OAC Д} - S_{OBC Д}\,, \quad т.к. \quad S_{OAC Д} = \int_0^1 \sqrt{x}dx\,; \qquad S_{OBC Д} = \int_0^1 x^2dx\,.$$

Искомая площадь: $S_{OACB} = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ (кв. ед).

Ответ: Искомая площадь равна $\frac{1}{3}$ (квадратных единиц).

Задачи для домашнего решения

Вычислить интегралы:

I. Метод непосредственного интегрирования

а) $\int_1^2 7^x dx$;

б) $\int_{-1}^1 11x^6 dx$;

в); $\int_0^1 \frac{8x^5 - 3x^2 + 4x}{x} dx.$;

г) $\int_1^{-1} (x-1)^3 dx$;

д) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x} dx$;

е) $\int_2^1 (3x^4 - 7x + 4)dx$;

ж) $\int_{-1}^1 x^2(x+7)dx$;

и) $\int_1^2 \frac{x^2 - 3x^4 + x}{x} dx.$

II. *Метод подстановки (замены переменной)*

а) $\int_0^4 x\sqrt{x^2 - 8}dx$;

б) $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 - 4}}$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin xdx}{\cos^2 x}$;

г) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} 5\sin^3 x \cdot \cos xdx$;

е) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos xdx}{(1 - \sin x)^2}$;

ж) $\int_{-2}^0 \frac{dx}{(1+3x)^2}$;

з) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} e^{\cos x} \sin xdx$;

и) $\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx$;

III. Метод интегрирования по частям

а) $\int_1^{2,7} x^3 \ln xdx$;

б) $\int_1^e x\ln xdx$;

в) $\int_0^{\pi} e^x \cdot \sin xdx$;

г) $\int_0^{\ln 2} x \cdot e^x dx$.

Найти площадь фигуры, ограниченную линиями:

а) $y=\sin x$ и $y=0,$ если $0\le x\le \frac{3}{2}\pi$;

б) $y=x^3$ и $y=x$;

в) $y=3-x^2$ и $y=x^2-4$;

г) $y=2x-1$ и $y=x^2$.

Задачи для решения на практических занятиях:

Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_1^2 \left(2x^3-x+4x^2\right)dx$;

б) $\int\limits_0^{\pi}(\sin x-\cos x)dx$;

в); $\int\limits_{-1}^{1}\frac{2x^5-8x^2+3x}{x}dx$;

г) $\int\limits_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^x}dx$;

д) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^5 x}dx$;

е) $\int\limits_2^1 x^4\left(1-x^5\right)^8 dx$;

ж) $\int e^{2x}xdx$;

з) $\int\limits_1^2 x^7 \ln xdx$;

и) $\int\limits_1^3 x^5(x-1)dx$;

к) $\int\limits_1^0 \left(x^2+3\right)^2 dx$;

л) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{3\sin 2x}{\sin x}dx$;

м) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x+\pi)dx$;

н) $\int\limits_1^0 \frac{xdx}{\sqrt{3-2x^2}}$;

о) $\int\limits_0^{\pi} e^{\cos 3x}\sin 3xdx$;

р) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \sin 3xdx$;

с) $\int\limits_0^{\pi} x^2\cos xdx$.

Найти площадь фигуры, ограниченную линиями:

а) $y=5-x^2$ и $y=0$;

б) $y=\cos x$ и $y=0$, если $0\le x\le \pi$;

в) $y = x^2 + 1$ и $y = 2 - x^2$;

г) $y = 2 + x$ и $y = x^2 - 1$;

д) $y = 4x^2$ и $y = x + 3$;

е) $y = 3x^2 - 1$ и $y = 1 - x^2$;

ж) $y = x^2 + 4$ и $y = 5 - x^2$.

ТЕМА №5

ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дифференциальные уравнения используются при изучении явлений и процессов в физике, химии, биологии, медицине, фармации и других областях знаний. Сформулировав задачу на языке дифференциальных уравнений, специалист любой отрасли знаний получает готовый аппарат для численного решения задачи, изучения качественных особенностей этого решения.

Цель занятия:

1. Научиться решать дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
2. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
3. Научиться решать дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
4. Научиться решать дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную ***x***, искомую функцию ***y=f(x)*** и её производные $y^{/}, y^{//}, ..., y^{n}$. Общий вид дифференциального уравнения:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{n}) = 0 \text{ или}$$

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$$

Порядок дифференциального уравнения определяется порядком наивысшей производной, входящей в данное уравнение:

$F(x, y, y') = 0$-дифференциальное уравнение первого порядка.

$F(x, y, y', y'') = 0$ -дифференциальное уравнение второго порядка.

Дифференциальное уравнение называется ***полным***, если оно содержит в себе свободный член, производные, начиная с производной нулевого порядка, затем производных первого, второго и всех последующих порядков. Если же один из этих членов отсутствует, то уравнение называется неполным.

$F(x, y, y', y'', y''') = 0$-полное дифференциальное уравнение

$F(x, y, y', y''') = 0$-неполное дифференциальное уравнение

Дифференциальное уравнение называется ***приведённым***, если в его правой части стоит ноль.

Дифференциальное уравнение называется ***обыкновенным***, если искомая функция $y = f(x)$ есть функция одного аргумента.

Решением или интегралом дифференциального уравнения называется всякая функция $y = f(x)$, которая будучи подставлена в дифференциальное уравнение (вместе со своими производными), превращает его в тождество.

Всякое решение, которое содержит столько произвольных постоянных, каков порядок уравнения, называется ***общим решением***. Решение, полученное из общего решения, путём задания произвольным постоянным определённых численных значений, называется ***частным решением***. На практике частное решение получается из общего решения не прямым заданием значений произвольных постоянных, а исходя из тех условий, которым должно удовлетворять искомое частное решение.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И МЕТОД ИХ РЕШЕНИЯ

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида:

$$\varphi(y)y' = f(x)$$

Общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными даётся формулой:

$$\int \varphi(y)dy = \int f(x)dx.$$

Эта формула задаёт ***y*** как функцию ***x*** неявно. Если уравнение решить относительно ***y***, то получим явное решение дифференциального уравнения.

Пусть задано дифференциальное уравнения с разделяющимися переменными:

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx - f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0;$$

Нужно разделить переменные: в левой части уравнения собрать все ***y*** и дифференциал ***dy***, в правой части все ***x*** и дифференциал ***dx.***

$$-f_2(x)\varphi_2(y)dy = -f_1(x)\varphi_1(y)dx;$$

Умножаем обе части на (-1), получаем:

$$f_2(x)\varphi_2(y)dy = f_1(x)\varphi_1(y)dx;$$

Левую часть нужно избавить от $f_2(x)$, а правую часть – от $\varphi_1(y)$. Для этого обе части делим на $f_2(x)\cdot\varphi_1(y)$ и получаем:

$$\frac{f_2(x)\varphi_2(y)dy}{\varphi_1(y)f_2(x)}=\frac{f_1(x)\varphi_1(y)dx}{\varphi_1(y)f_2(x)};$$

После сокращения получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx;$$

После чего интегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx.$$

Например: Найти общее и частное решения дифференциального уравнения:

$$\left(x^3+7\right)y'=x^2y \quad \text{при} \quad y=6; \quad \text{и} \quad x=1 \ \text{(начальные условия)}$$

Заменяем $y'=\dfrac{dy}{dx}$, получаем:

$$\left(x^3+7\right)\frac{dy}{dx}=x^2y;$$

Левую часть освобождает от $\boldsymbol{x}$, для чего обе части умножаем на $\dfrac{dx}{x^3+7}$

$$dy=x^2y\frac{dx}{x^3+7};$$

Правую часть освобождаем от у, деля обе части на $\boldsymbol{y}$:

$$\frac{dy}{y}=\frac{x^2dx}{x^3+7};$$

Получили уравнение с разделенными переменными, берем интегралы левой и правой части, получаем:

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{x^2dx}{x^3+7}$$

Левый интеграл табличный, а правый решаем методом подстановки.

$$\int\frac{x^2dx}{x^3+7}=\left|\begin{array}{l} x^3+7=t \\ 3x^2dx=dt \\ x^2dx=\dfrac{dt}{3}\end{array}\right|=\int\frac{dt}{3t}=\frac{1}{3}\ln t+C=\frac{1}{3}\ln\left|x^3+7\right|+C;$$

Раскрываем оба интеграла:

$$ln|y|=\frac{1}{3}ln\left|x^3+7\right|+lnC;$$

Для удобства постоянную интегрирования C берем под знак логарифма.

Потенцируем и получаем:

$y = C\left(x^3+7\right)^{\frac{1}{3}}$, или $y = C\sqrt[3]{x^3+7}$ - это есть **общее решение** дифференциального уравнения.

Находим частное решение. Для этого в общее решение подставляем начальные условия y и x и находим численное значение C:

$$6 = C\sqrt[3]{1^3+7} = 2C \text{, откуда } C = \frac{6}{2} = 3$$

Полученные значение С подставляем в общее решение и получаем:

$y = 3\sqrt[3]{x^3+7}$ - **частное решение** дифференциального уравнения.

Проверка (основана на определении, что решением дифференциального уравнения называется всякая функция, при подстановки которой и её производных в уравнение получаем тождество): $y' = \left(C\sqrt[3]{x^3+7}\right)' = C\frac{1}{3}\left(x^3+7\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 3x^2 = \frac{Cx^2}{\sqrt[3]{\left(x^3+7\right)^2}}$;

$$\left(x^3+7\right)\cdot\frac{Cx^2}{\sqrt[3]{\left(x^2+7\right)^2}} = x^2C\sqrt[3]{\left(x^3+7\right)};$$

$$\frac{x^3+7}{\sqrt[3]{\left(x^2+7\right)^2}} = \sqrt[3]{x^3+7};$$

Возводим обе части в куб:

$$\frac{\left(x^3+7\right)^3}{\left(x^2+7\right)^2} = x^3+7;$$

$$x^3+7 = x^3+7.$$

Примечание. Основные случаи потенцирования:

1. $ln|y| = ln|x| + ln|C|$ $\qquad y = C\cdot x$;
2. $ln|y| = a\,ln|x| + ln|C| \quad a = const$ $\qquad y = C\cdot x^a$;
3. $ln|y| = -ln|x| + ln|C|$ $\qquad y = \frac{C}{x}$;
4. $ln|y| = x + ln|C|$ $\qquad y = C\cdot e^x$.

3. ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Уравнение $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ называется однородным, если функция $f(x, y)$ может быть представлена как функция отношения своих аргументов.

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Однородное дифференциальное уравнения первого порядка приводится к виду уравнения с разделяющимися переменными подстановкой:

$$\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = \mathrm{U},$$

где ***U*** – новая неизвестная функция.

Например:

$$2x \cdot y \cdot y' = y^2 - 4x^2;$$

Учитывая, что $y' = \frac{dy}{dx}$, получаем

$$2xy\frac{dy}{dx} = y^2 - 4x^2;$$

Находим $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 4}{2xy};$$

Делим числитель и знаменатель правой части равенства на x^2, получаем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y^2}{x^2} - 4x^2}{2\frac{y}{x}} \qquad (1)$$

Вводим новую переменную $U = \frac{y}{x}$, (2)

т.е. $y = Ux$, откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(U \cdot x) = U\frac{dx}{dx} + x\frac{dU}{dx} = U + x\frac{dU}{dx} \qquad (3)$$

Подставляем значения из равенств (2) и (3) в равенство (1), получаем:

$$U + x\frac{dU}{dx} = \frac{U^2 - 4}{2U}$$

Путем преобразований делим переменные (уравнение решается относительно ***U***)

$$x\frac{dU}{dx} = \frac{U^2 - 4}{2U} - U = \frac{U^2 - 4 - 2U^2}{2U} = -\frac{U^2 + 4}{2U};$$

$$\frac{2U}{U^2+4}dU = -\frac{dx}{x}$$

Интегрируем обе части:

$$\int \frac{2U}{U^2+4}dU = -\int \frac{dx}{x};$$

$$\ln\left|U^2+4\right| = -\ln|x| + \ln|C|;$$

$$U^2+4 = \frac{C}{x};$$

$$U^2 = \frac{C}{x} - 4;$$

$$U = \sqrt{\frac{C}{x} - 4} \qquad (4)$$

Подставляем значение ***U*** из (4) во (2):

$$\frac{y}{x} = \sqrt{\frac{C}{x} - 4};$$

$$\mathrm{y} = \mathrm{x}\sqrt{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{x}} - 4}$$ -общее решение.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y'' + py' + qy = f(x);$$

если в правой части уравнения стоит ноль, то

$$y'' + py' + qy = 0;$$

то уравнение называется ***однородным линейным***.

Для решения такого уравнения составляется характеристическое уравнение. ***Характеристическим*** называется квадратное уравнение, полученное на основе дифференциального уравнения, в котором y, y', y'' заменяются новой переменной k, степень которой определяется порядком производной:

$$\mathrm{y}'' = \mathrm{k}^2, \quad \mathrm{y}' = \mathrm{k}, \quad \mathrm{y} = \mathrm{k}^0 = 1;$$

Тогда $k^2 + pk + q = 0$ - характеристическое уравнение.

Находим корни характеристического уравнения:

$$k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

1. Если корни характеристического уравнения действительные и равные $k_1 = k_2$, т.е. дескременант ***Д=0,*** то решением дифференциального уравнения будет являться функция:

$$y = (C_1 x + C_2) \cdot e^{kx}. \qquad (1)$$

2. Если корни характеристического уравнения действительные и равные числа $k_1 \neq k_2$, ***Д>0***, то:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \qquad (2)$$

3. Если корни характеристического уравнения – комплексные числа при ***Д<0,*** т.е. $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i \quad (\beta \neq 0)$, то

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x). \qquad (3)$$

Например: Найти общее решение дифференциального уравнения:

1. $y^{//} - 2y^{/} + y = 0$

Составляем характеристическое уравнение:

$$k^2 - 2k + 1 = 0;$$

Находим его корни:

$$k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1;$$

$$k_1 = k_2 = k = 1$$

Подставляем полученное значение к=1 равенство (1), получаем:

$$y = (C_1 x + C_2)e^x.$$

2. $y'' - 3y' - 4y = 0$

$k^2 - 3k - 4 = 0$

$k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2};$

$k_1 = 4$

$k_2 = -1$

Полученные значения ***к₁*** и ***к₂*** подставляем в равенство (2), получаем:

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}$$

3. $5y'' - 8y' + 5y = 0$

$$5k^2 - 8k + 5 = 0$$
$$k_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-100}}{10} = \frac{8 \pm 6i}{10} = 0{,}8 \pm 0{,}6i$$
$$\alpha = 0{,}8$$
$$\beta = |0{,}6|$$

Полученные значения $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ подставляем в равенство (3), получаем:

$$y = e^{0{,}8x}(C_1 \cos 0{,}6x + C_2 \sin 0{,}6x)$$

5. *ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА*

Пусть у нас есть дифференциальное уравнение, разрешенное относительно второй производной:

$$y'' = f(x, y, y'),$$

Рассмотрим виды дифференциальных уравнений второго порядка, которые допускают понижение порядка:

I. Дифференциальные уравнения не содержащие аргумента:

$$y'' = f(y, y'); \quad (*)$$

Вводим новую переменную $\boldsymbol{P}$:

$$y' = \frac{dy}{dx} = P \Rightarrow dx = \frac{dy}{P};$$

$$y'' = \frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dy} \cdot P \quad \text{подставляем это в (*) получаем:}$$

$$\frac{dP}{dy} P = f(y, P).$$

Получили дифференциальные уравнения первого порядка и его решением будет функция: $P = \varphi(y, C_1)$ или

$\dfrac{dx}{dy} = \varphi(y, C_1)$ Разделяем переменные, умножая обе части на dx:

$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx;$$

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = \int dx;$$

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2 \quad \text{- Общее решение}$$

<u>Пример:</u>

$$(y+3)y''-(y')^2=0.$$

Вводим замену: $y' = \dfrac{dy}{dx} = P;$ (1)

Из равенства (1) получаем: $dx = \dfrac{dy}{P};$ (2)

Тогда $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{dP}{dx} = \dfrac{dP}{dy}P;$ (3)

Подставляем значения y' и y'' из равенств (1) и (3) в заданное уравнение и получаем:

$$(y+3)\frac{dP}{dy}P-P^2=0.$$

Получили уравнение первого порядка. Решаем методом разделения переменными ***P*** и ***y***. Уравнение решается относительно ***P***.

$$(y+3)\frac{dP}{dy}P=P^2.$$

Сокращаем обе части на ***P***

$$(y+3)\frac{dP}{dy}=P.$$

Делим переменные, умножая обе части на $\dfrac{dy}{(y+3)P}$, получаем:

$$\frac{dP}{P}=\frac{dy}{y+3}.$$

Интегрируем оба части:

$$\int\frac{dP}{P}=\int\frac{dy}{y+3};$$

$$\ln|P|=\ln|y+3|+\ln|C_1|;$$

Потенцируем:

$$P=C_1(y+3); \qquad (4)$$

Подставляем полученное значение P из равенства (4) в равенство (1), получаем:

$$\frac{dy}{dx}=C_1(y+3)$$

Вновь получили дифференциальное уравнение первого порядка относительно переменных ***y*** и ***x***.

Делим переменные, умножая обе части равенства на $\frac{dx}{y+3}$, получаем:

$$\frac{dy}{y+3} = C_1 dx$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y+3} = C_1 \int dx;$$

$$\ln|\, y+3\,| = C_1 x + \ln|\, C_2\,|.$$

Потенцируем:

$$y+3 = C_2 e^{C_1 x};$$

Получаем общее решение дифференциального уравнения:

$$y = C_2 e^{C_1 x} - 3.$$

II. Дифференциальные уравнения не содержащие искомой функции:

$$y'' = f(x, y') \qquad (**)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = P;$$

$$y'' = \frac{dP}{dx};$$

Тогда уравнение (**) примет вид:

$$\frac{dP}{dx} = f(x, P).$$

Решением этого уравнения будет функция: $P = \varphi(x, C_1)$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, C_1);$$

$$dy = \varphi(x, C_1)dx;$$

$$\int dy = \int \varphi(x, C_1)dx;$$

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2.$$ - Общее решение

Пример:

$$(x^3+1)y'' = 3x^2 y';$$

Вводим замену: $y' = \frac{dy}{dx} = P;$ (1)

Тогда $y'' = \frac{dP}{dx};$ (2)

Подставляем значения y' и y'' из равенств (1) и (2) в исходное уравнение и получаем:

$$\left(x^3+1\right)\frac{dP}{dx}=3x^2P\,.$$

Делим переменные, умножая обе части на $\dfrac{dx}{(y+3)P}$, получаем:

$$\frac{dP}{P}=\frac{3x^2dx}{x^3+1}\,.$$

Интегрируем оба части равенства:

$$\int\frac{dP}{P}=\int\frac{3x^2dx}{x^3+1};$$

$$\ln\left|\,P\,\right|=\ln\left|\,x^3+1\right|+\ln\left|\,C_1\,\right|$$

Потенцируем:

$$P=C_1(x^3+1); \qquad (3)$$

Подставляем значение ***P*** из равенства (3) в равенство (1) и получаем:

$$\frac{dy}{dx}=C_1(x^3+1)\,.$$

Делим переменные, умножая обе части равенства на dx, и интегрируем:

$$\int dy=C_1\int\left(x^3+1\right)dx=C_1\int x^3dx+C_1\int dx;$$

$$y=C_1\frac{x^4}{4}+C_1x+C_2 \text{ - Общее решение}$$

III. Дифференциальные уравнения не содержащее искомой функции и её производной:

$$y''=f(x) \quad (***)$$

Подстановка: $y'=\dfrac{dy}{dx}=P;\ y''=\dfrac{dP}{dx}$ подставляем в (***)

$$\frac{dP}{dx}=f(x);$$

$$\int dP=\int f(x)dx;$$

$$P=\int f(x)dx+C_1;$$

$$\frac{dy}{dx}=\int f(x)dx+C_1;$$

$$\int dy=\int f(x)dx+\int C_1dx;$$

$$y=\int f(x).dx+C_1x+C_2 \text{ - Общее решение}$$

Например: Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$xy''=x^2-5;$$

Вводим подстановку: $y' = \frac{dy}{dx} = P$ (1)

Тогда $y'' = \frac{dP}{dx}$; (2)

Подставляем значения y'' из равенства (2) в исходное уравнение:

$$x\frac{dP}{dx} = x^2 - 5\,.$$

Делим переменные, умножая обе части равенства на $\frac{dx}{x}$, получаем:

$$dP = \frac{x^2 - 5}{x}dx = \left(x - \frac{5}{x}\right)dx\,.$$

Решаем полученное уравнение, интегрируя обе части:

$$\int dP = \int x dx - 5\int \frac{dx}{x};$$

и получаем;

$$P = \frac{x^2}{2} - 5\ln|x| + C_1 \qquad (3)$$

Подставляем значение ***P*** из равенства (3) в равенство (1), получаем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} - 5\ln|x| + C_1\,.$$

Делим переменные, умножая обе части равенства на dx, и интегрируем:

$$dy = \left(\frac{x^2}{2} - 5\ln|x| + C\right)dx;$$

$$\int dy = \frac{1}{2}\int x^2 dx - 5\int \ln|x|dx + \int C_1 dx;$$

$$y = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - 5(x\ln x - x) + C_1 x + C_2\,.$$

Таким образом,

$$y = \frac{x^3}{6} - 5(x\ln x - x) + C_1 x + C_2 \text{ - Общее решение}$$

Примечание. Решаем интеграл $\int \ln|x|dx$ методом интегрирования по частям:

$$\int \ln x \cdot dx = \left| \begin{array}{ll} U = \ln x; & d\vartheta = dx; \\ dU = (\ln x)' dx & \int d\vartheta = \int dx \\ dU = \frac{1}{x} dx & \vartheta = x \end{array} \right| = x \cdot \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - x + C$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Задачи для домашнего решения

1. Найти общее и частное решение:

а) $y' = 3\sin x$ при $y = 4$, если $x = \pi$;

б) $(x^3 - 1)y' = 3x^2 y$ при $y = 21$, если $x = 2$;

в) $x^2 y' = 8$ при $y = 9$, если $x = 4$;

г) $y(x-5)y' = 1$ при $y = 3$, если $x = 7{,}7$;

д) $(x+3)dy = (y-8)dx$ при $y = 48$, если $x = 2$;

е) $y' tgx = 2y$ при $y = 7$, если $x = \frac{\pi}{2}$.

2.Найти общее решение:

а) $y^2 dx - x(x-y)dy = 0$;

б) $x^2 - y^2 + 2xy \cdot y' = 0$;

в) $y^2 - 4xy + 4x^2 y' = 0$.

3.Найти общее решение:

а) $y'' - 2y' + 2y = 0$;

б) $y'' - 16y = 0$;

в) $3y'' - 7y' + 2y = 0$;

г) $2y'' - 25y' = 0$;

д) $2y'' - 7y' + 3y = 0$;

е) $y'' - 8y' - 16y = 0$.

4.Найти общее решение:

а) $y'' + 2yy' = 0$;

б) $(y')^2 = y''(y-1)$;

в) $(1+x^4)y'' - 4x^3 y' = 0$;

г) $xy'' + y' = 0$;

д) $xy'' = x^2 + 1$;

е) $y'' = \cos x$.

Задачи для решения на практических занятиях

1. *Найти общее и частное решения:*

а) $y' = 5x^2$ при $y = 4$, если $x = 1$;

б) $(x+7)dy = (y-4)dx$ при $y = 39$, если $x = 2$;

в) $(x^4+3)y' = 4x^3 y$ при $y = 16$, если $x = 1$;

г) $y' ctgx - 1 = y$ при $y = 3$, если $x = 0$;

д) $y' = \frac{1}{x} + x^2$ при $y = 1 + \frac{e^3}{3}$, если $x = e$;

е) $3y^2 y' = y^3 + 1$ при $y = 2$, если $x = 0$;

ж) $\sin x \cdot dx = -dy$ при $y = 1$, если $x = \frac{\pi}{3}$;

з) $3xy' = y$ при $y = 6$, если $x = 9$;

и) $y' = 8x^3 - 1$ при $y = 5$, если $x = 1$;

к) $y' = y\cos x$ при $y = 7$, если $x = \frac{\pi}{2}$.

2. *Найти общее решение:*

а) $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$;

б) $xdy - ydx = ydy$;

в) $y' = \frac{x+y}{x-y}$;

г) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$;

д) $y^2 + x^2 y' = xy$.

3. *Найти общее решение:*

а) $y'' + 27y' + 14y = 0$;

б) $y'' - 10y' + 25y = 0$;

в) $y'' - 81y = 0$;

г) $y'' + 5y' = 0$;

д) $4y'' + 12y' + 9y = 0$;

е) $y'' - 2y' + 5y = 0$;

ж) $2y'' - 2y' + 5y = 0$;

з) $y'' - 18y' + 81y = 0$;

к) $3y'' - 4y' + y = 0$;

л) $y'' - 4y' + 5y = 0$;

м) $5y'' - 2y' + 10y = 0$;

н) $2y'' - 6y' - 20y = 0$;

о) $9y'' - 6y' + y = 0$;

п) $3y'' + 11y' + 10y = 0$;

р) $16y'' + 24y' + 9y = 0$;

с) $7y'' - 12y' - 4y = 0$;

и) $y'' - 2y' - 8y = 0$;

т) $3y'' - 20y' - 7y = 0$.

4. *Найти общее решение:*

а) $yy'' + (y')^2 = 0$;

б) $y'' c\lg y = (y')^2$;

в) $1 - (y')^2 = 2yy''$;

г) $xy'' = y'$;

д) $(x^5 - 4)y'' = 5x^4 y'$;

е) $tgx \cdot y'' = y'$;

ж) $y'' = x \cdot e^x$;

з) $y'' = x - \sin x$;

к) $y'' = (x^2 + 1)^2$.

ТЕМА №6
СОСТАВЛЕНИЕ И РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПРИМЕРАХ ЗАДАЧ ФИЗИЧЕСКОГО, ХИМИЧЕСКОГО, ФАРМАЦЕВТИЧЕСКОГО И МЕДИКО-БИОЛОГИЧЕСКОГО СОДЕРЖАНИЯ

Дифференциальные уравнения являются одним из средств математического моделирования. Пользуясь ими, мы устанавливаем связь между переменными величинами, характеризующими данный процесс или явление.

Пример 1: Зависимость числа нераспавшихся ядер атомов радиоактивных элементов от времени. (Основной закон радиоактивного распада).

Ядра атомов радиоактивных элементов с течением времени распадаются. Опытным путем установлено, что скорость распада пропорциональна числу нераспавшихся в данный момент ядер атомов. В аналитической форме это можно записать так: $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$,

(1)

где $\boldsymbol{N}$ - число нераспавшихся в данный момент ядер атомов;

$\boldsymbol{t}$ - время;

λ - постоянная распада.

Минус означает, что с течением времени число нераспавшихся ядер атомов уменьшатся.

Установим зависимость числа нераспавшихся ядер атомов радиоактивного вещества от времени, если при $t=0$ число нераспавшихся ядер атомов $N=N_0$

В исходном уравнении (1) разделим переменные и проинтегрируем левую часть по $\boldsymbol{N}$, а правую часть по $\boldsymbol{t}$:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda\, dt;$$

$$\int \frac{dN}{N} = -\int \lambda\ dt;$$
$$\ln|N| = -\lambda\, t + \ln C;$$
$$\ln|N| = \ln e^{-\lambda\, t} + \ln|C|;$$
$$N = Ce^{-\lambda\, t}.$$

Полагая в последнем уравнении что при $t = 0$ и $N = N_0$, находим $C{=}N_0$. Тогда

$$N = N_0 e^{-\lambda\, t} \qquad (2)$$

N_0-начальное число ядер.

Формула (2) отражает зависимость числа нераспавшихся ядер атомов радиоактивного вещества от времени, график этой зависимости показан на рисунке 1.

Из формулы (2) можно определить период полураспада T, т.е. время, в течение которого число ядер атомов уменьшается вдвое. Положив в формуле (2) $t{=}T$ и $N = \frac{N_0}{2}$, получим:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T}\ ;\ \frac{1}{2} = e^{-\lambda T}\ .$$

Прологарифмируем последнее выражение: $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda\ T$, откуда $T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0{,}693}{\lambda}$;

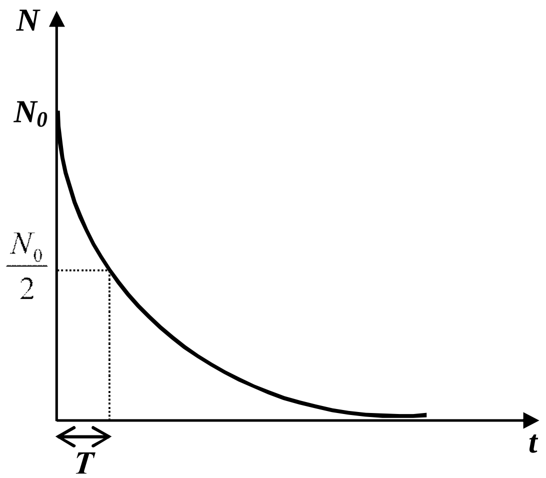


Рис 1. График зависимости числа не распавшихся ядер от времени

Из последней формулы видно, что период полураспада связан с постоянной распада и является характеристикой данного радиоактивного вещества.

Пример 2. Кинетика химических процессов

В общем случае скорость химической реакции зависит от концентрации реагирующих веществ. Уравнение, выражающее зависимость скорости реакции от концентрации каждого вещества, влияющего на скорость, называется кинетическим дифференциальным уравнением химического процесса. Рассмотрим химические процессы первого порядка.

Скорость, реакции первого порядка выражается уравнением:

$$\vartheta = \frac{dC}{dt} = -kC\,, \qquad (1)$$

где ***C*** - концентрация реагирующего вещества: ;

k - постоянная скорости реакции.

Минус в уравнении (1) означает, что концентрация реагирующего вещества с течением времени убывает.

В дифференциальном уравнении (1) разделим переменные и проинтегрируем его:

$$\frac{dC}{C} = -kdt;$$

$$\int \frac{dC}{C} = -k\int dt;$$

$$\ln|C| = -kt + \ln|a|;$$

$$\ln|C| = \ln e^{-kt} + \ln|a|;$$

$$C = ae^{-kt},$$

где ***a*** - постоянная интегрирования.

Полагая при ***t=0***, ***C=C₀***, получаем ***a=C₀***, следовательно,

$$C = C_0 e^{-kt}, \qquad (2)$$

где ***C₀*** – начальная концентрация реагирующего вещества.

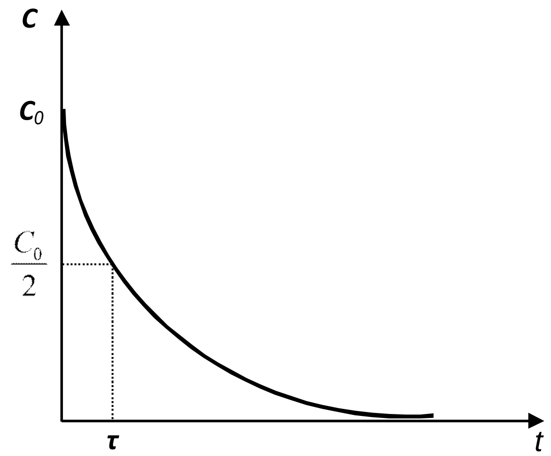


Рис 2. График изменения концентрации вещества, вступающего в реакцию, от времени.

Формула (2) выражает закон химической реакции первого порядка в интегральной форме. Пользуясь уравнением (2), можно определить время, за которое концентрация исходного вещества уменьшается на половину. Это время называют периодом полупревращения или полупериодом протекания реакции и обозначают $\boldsymbol{\tau}$.

Подставив значения $\boldsymbol{t=\tau}$, $C=\dfrac{C_0}{2}$ в уравнение (2), получим:

$$\frac{C_0}{2}=C_0\mathrm{e}^{-k\tau},\ \textit{откуда}\ \frac{1}{2}=e^{-k\tau};$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-k\,\tau;$$

$$\tau=\frac{\ln 2}{k}\approx\frac{0{,}693}{k}.$$

Таким образом, период полупревращения не зависит от исходной концентрации вещества, и за равные промежутки времени расходуется одна и та же доля вещества.

Пример3. Закон растворения лекарственных форм вещества из таблеток

Скорость растворения лекарственных форм вещества из таблеток пропорциональна количеству лекарственных форм вещества в таблетке.

Необходимо установить зависимость изменения количества лекарственных форм вещества в таблетке с течением времени.

Обозначим через m количество вещества в таблетке, оставшееся ко времени растворения $\boldsymbol{t}$.

Тогда
$$\frac{dm}{dt}=-km \qquad (1),$$

где $\boldsymbol{k}$ - постоянная скорости растворения.

Знак минус означает, что количество лекарственных форм вещества с течением времени убывает.

В дифференциальном уравнении (1) разделим переменные и проинтегрируем его:

$$\frac{dm}{m}=-kdt;$$

$$\int\frac{dm}{m}=-k\int dt;$$

$$\ln|\,m\,|=-kt+\ln|\,C\,|;$$

$$\ln|\,m\,|=\ln e^{-kt}+\ln|\,C\,|;$$

$$m=C\cdot e^{-kt}.$$

Полагая, что при $\boldsymbol{t=0}$ $\boldsymbol{m=m_0}$,, получаем $\boldsymbol{C=m_0}$, следовательно,

$$m = m_0 e^{-kt}. \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{m_0}$ – начальная масса лекарственных форм вещества в таблетке.

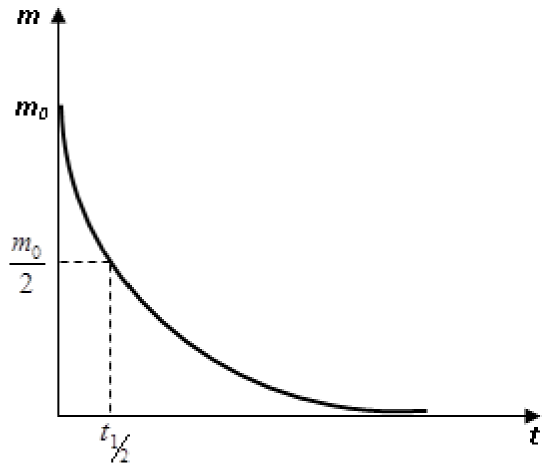


Рис 3. График изменения количество лекарственного вещества в таблетке от времени.

Формула (2) выражает закон растворения лекарственных форм вещества из таблеток в интегральной форме.

Из уравнения (2) находят постоянную скорости растворения $\boldsymbol{k}$:

$$m = m_0 e^{-kt};$$

$$\frac{m}{m_0} = e^{-kt};$$

$$\ln\frac{m}{m_0} = \ln e^{-kt};$$

$$\ln\frac{m}{m_0} = -kt;$$

$$\ln\frac{m_0}{m} = kt;$$

$$k = \frac{1}{t}\ln\frac{m_0}{m}.$$

Период полурастворения таблеток $t_{1/2}$ рассчитывают из формулы (2) при

$$t = t_{1/2}, \quad m = \frac{m_0}{2}.$$

Тогда $\dfrac{m_0}{2} = m_0 e^{-k t_{1/2}}$; $\quad \dfrac{1}{2} = e^{-k t_{1/2}}$; $\quad ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -kt_{1/2}$.

Откуда $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} = \frac{0{,}639}{k}$.

Пример 4. Закон размножения бактерий с течением времени.

Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна количеству бактерий в данный момент. Установим зависимость изменения количества бактерий от времени.

Обозначим количество бактерий, имеющихся в данный момент, через x.

Тогда $\frac{dx}{dt} = kx$, (1)

где $\boldsymbol{k}$ - коэффициент пропорциональности.

В уравнении (1) разделим переменные и проинтегрируем его:

$$\int \frac{dx}{x} = kdt;$$

$$\int \frac{dx}{x} = k\int dt;$$

$$ln|x| = kt + ln|C|;$$

$$ln|x| = ln e^{kt} + ln|C|.$$

Потенцируем последнее выражение:

$$x = C \cdot e^{kt}.$$

Полагая, что при $\boldsymbol{t=0}$ $\boldsymbol{x=x_0}$, получаем $\boldsymbol{C=x_0}$. Следовательно,

$$x = x_0 \cdot e^{kt},$$

где x_0 – начальное количество бактерий.

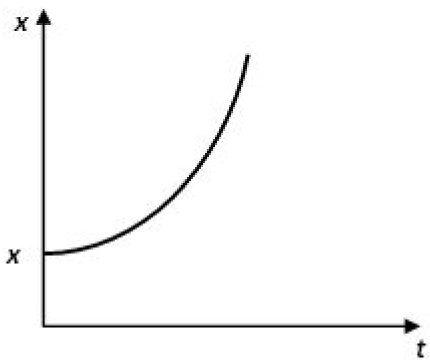


Рис 4. График изменения числа бактерий со временем.

Из этого уравнения следует, что при благоприятных условиях увеличение количества бактерий с течением времени происходит по экспоненциальному закону.

Пример 5. Закон разрушения клеток в звуковом поле

Кавитация ультразвуковых волн проявляется в виде разрывов суспензионной среды и образования мельчайших пузырьков и пустот, плотность которых незначительна по сравнению с плотностью воды. Простейшие (бактерии, водоросли, дрожжи, лейкоциты, эритроциты) могут быть разрушены при кавитации, возникающей в интенсивном звуковом поле. Относительные скорости разрушения биологических клеток различных видов остаются постоянными в очень широком диапазоне частот. Эти скорости могут характеризовать относительную хрупкость клеток различных видов. Чтобы выразить это количественно, нужно определить скорость разрушения клеток в постоянном звуковом поле. Изучение этого вопроса показывает, что по крайней мере 1% популяции остаётся неразрушенным. Поэтому можно записать так:

$$\frac{dN}{dt} = -RN\,, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{N}$ - концентрация клеток; $\boldsymbol{t}$ - время; $\boldsymbol{R}$ - постоянная.

В уравнении (1) разделим переменные и проинтегрируем его:

$$\frac{dN}{N} = -Rdt;$$

$$\int \frac{dN}{N} = -\int Rdt\,;$$

$$\ln|N| = -Rt + \ln|C|;$$

$$\ln|N| = \ln e^{-Rt} + \ln|C|;$$

$$N = Ce^{-Rt}\,.$$

Постоянную C найдем из условий, что при $\boldsymbol{t = 0, N = N_0}$, $\boldsymbol{C = N_0}$. Тогда

$$N = N_0 e^{-Rt}\,,$$

т.е. разрушение клеток в постоянном звуковом поле происходит по экспоненциальному закону.

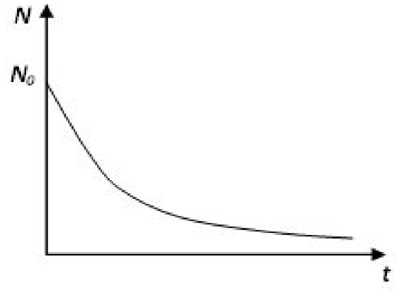


Рис 5. График зависимости изменения концентрации клеток в звуковом поле от времени.

ТЕМА №7
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Явление, которое при неоднократном наблюдении или воспроизведении одного и того же опыта протекает каждый раз несколько по иному, называется **случайным.** Случайность объективно существует в окружающем нас мире вследствие принципиальной невозможности проследить все причинные связи изучаемого явления с бесчисленным множеством других явлений. Отдельное явление представляет собой следствие какого-то другого и само служит причиной последующего, но проследить связь между условиями и конечным результатом часто затруднительно или даже невозможно. Однако **случайные явления**, если их число достаточно велико, подчиняются определенным закономерностям, изучаемым **в теории вероятностей**.

Теория вероятностей–это раздел математики, в котором изучаются закономерности, присущие случайным событиям, величинам и процессам массового характера.

Теория вероятностей нашла применение в теории эпидемий, в разработке медицинских методов математической диагностики, в организации здравоохранения и т.д.

Цель занятия: Научиться применять при решении задач основные понятия и теоремы теории вероятностей.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Массовые явления и процессы характеризуются многократным повторением при постоянных условиях некоторых наблюдений, опытов, операций. Осуществление некоторого комплекса условий, который может быть воспроизведен сколько угодно большое число раз, называется ***испытанием***. Результат, исход испытания называют ***событием.*** Случайным событием в теории вероятностей называют всякое событие, которое в результате испытания может произойти или не произойти. Случайные события обозначают большими буквами латинского алфавита: ***A, B, C***…

1. Основные виды случайных событий

Если в результате испытания непременно должно появиться хотя бы одно из рассматриваемых событий, то их называют ***полной группой событий.***

Примеры событий, образующих полную группу:

1. Выпадение герба и выпадение цифры при бросании монеты.
2. Появление 1,2,3,4,5,6 очков при бросании игральной кости - симметричного кубика, на гранях которого нанесенно различное число очков от 1 до 6.
3. При измерении давления крови человека оно может оказаться нормальным, пониженным, повышенным.

Два события называют ***совместными***, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же испытании. Например, при бросании игральной кости: событие ***A*** - появление трех очков, событие ***B*** – появление нечетного числа очков. В этом случае события ***A*** и ***B*** – совместные.

Несколько событий называют ***несовместными***, если в результате испытания осуществление одного из них исключает осуществление остальных. Например, давление крови человека при одном измерении не может быть одновременно нормальным и повышенным или нормальным и пониженным.

Два несовместных события, составляющих полную группу, называются ***противоположными:*** ***A*** и $\overline{A}$. Напрмер, наличие и отсутствие заболевания; выпадение герба и выпадение цифры при бросании монеты.

Понятие совместности или несовместности событий связано с тем, какое испытание имеется в виду. Одни и те же события ***A*** и *B* могут оказаться несовместными в одном испытании и совместными в другом. Например, попадание и промах являются несовместными событиями, если испытание состоит в том, что производится один выстрел. Однако, попадание и промах совместны, если испытание состоит в том, что призводится несколько выстрелов.

2. *Понятие вероятности события*

Предположим, что производится массовое обследование населения. Например, определяется температура тела, измеряется давление крови, производится анализ мочи, крови. При этом происходят события:

A – наличие повышенной температуры;

B – наличие нормального давление крови;

C – наличие повышенного давления;

D – наличие сахара в моче;

E – пониженное содержание лейкоцитов в крови и т.д.

Каждое из перечисленных событий обладает какой-то степенью возможности: одно – большей, другое – меньшей. Чтобы количественно сравнивать события по степени их возможности, с каждым событием связывают определенное число, которое тем больше, чем более возможно событие. Такое число называют ***вероятностью события.*** В качестве единицы измерения вероятности принимают вероятность ***достоверного события*** – такого события, которое в результате испытания непременно должно произойти. Например, достоверное событие – обнаружение лейкоцитов при проведении анализа крови. Противоположным по отношению к достовеному событию является ***невозможное событие*** – такое событие, которое в данном испытании не может произойти. Например, отсутствие лейкоцитов в крови человека – невозможное событие. Если приписать достоверному событию вероятность, равную единице, а невозможному событию, равную нулю, то все другие события – возможные, но не достоверные, будут характеризоваться вероятностями, составляющими какую-то долю единицы:

$$\boldsymbol{0 \le P \le 1}$$

3. Классическое определение вероятности

Исторически закономерности случайных явлений изучались на материале азартных игр. Азартные игры создавались таким образом, чтобы их исходы были независимы от поддающихся наблюдению условий, то есть были чисто случайными. Схемы азартных игр дают исключительно простые модели для изучения специфических законов случайных явлений, для которых вероятности возможных исходов испытаний можно оценить непосредственно из условий испытаний. Для этого испытания должны обладать симметрией возможных исходов.

Рассмотрим, например, испытание, состоящее в бросании игрального кубика. В силу симметрии кубика есть основания считать, что все шесть возможных исходов испытания одинаково возможны. Это позволяет предполагать, что при многократном бросании кубика все шесть граней будут выпадать примерно одинаково часто. Для правильно выполненного кубика это предположение действительно оправдывается: при многократном бросании кубика каждая его грань выпадает примерно в одной шестой доле случаев бросания. Отклонение этой доли от $\frac{1}{6}$ тем меньше, чем больше число испытаний произведено. Для всякого испытания, в котором возможные исходы симметричны и одинаково возможны, можно применить аналогичный прием, который называется непосредственным подсчетом вероятностей.

События, образующие полную группу попарно несовместных и равновозможных событий, называют ***элементарными***. Элементарными событиями, например, являются: появление герба и цифры при бросании монеты; появление 1,2,3,4,5,6 очков при бросании игрального кубика.

Элементарные события такой группы называют благоприятствующими осуществлению события ***A***, если осуществление любого из элементарных событий влечет за собой осуществление события ***A***. Например, появление 2,4,6 очков при бросании игрального кубика благоприятствует осуществлению события ***A***, заключающегося в появлении четного числа очков.

Классической вероятностью P(A) события A называется отношение числа ***m*** элементарных событий, благоприятствующих событию ***A***, к числу ***n*** всех элементарных событий, то есть

$$P(A) = \frac{m}{n} \ .$$

Задача:

В коробке находится 4 красных и 6 синих карандашей. Наугад извлекаем 1 карандаш. Определить вероятность, что он будет красным.

Решение:

Число элементарных событий, благоприятствующих извлечению красного карандаша событие А, ***m***=4. Общее число элементарных событий ***n***=10.

Вероятность извлечения красного карандаша $P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

4. Статистическое определение вероятности

Если в одних и тех же условиях произведена серия из n испытаний, в каждом из которых могло появиться или не появиться некоторое событие ***A***, то отношение числа испытаний, в которых появилось событие ***A***, к общему числу произведенных испытаний, называется ***относительной частотой*** события ***A***, или ***частотой***.

Частота события вычисляется на основании результатов испытаний по формуле:

$$P^{*}(A) = \frac{m}{n},$$

где ***m*** – число появлений события ***A***,

n – число испытаний.

Увеличение числа испытаний уменьшает колебание частоты события около некоторой постоянной величины.

Статистической вероятностью случайного события называют предел, к которому стремится частота события при неограниченном увеличении числа испытаний:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n} .$$

Практически за вероятность случайного события можно принять относительную частоту события при большом числе испытаний.

Задача:

При обследовании 250 человек путем флюорографии были выявлены следующие заболевания: у 7 человек–опухоль в легких, у 3 человек–плеврит, у 5 человек–остаточные явления после пневмонии. Найти вероятность этих заболеваний, выявленных с помощью флюорографии.

Дано:

n =250

m_1=7

m_2=3

m_3=5

P(A)-?

P(B)-?

P(C)-?

Решение:

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{7}{250} = 0{,}028 = 2{,}8\%;$$

$$P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{3}{250} = 0{,}012 = 1{,}2\%;$$

$$P(C) = \frac{m_3}{n} = \frac{5}{250} = 0{,}02 = 2\%.$$

5. Понятие условной вероятности

Рассмотрим сложное событие, являющееся результатом двух последовательных испытаний. В первом испытании осуществилось событие ***A***, а во втором - событие ***B***. Проведение первого испытания может влиять на вероятность осуществления второго, а может и не влиять. В первом случае события ***A*** и ***B*** называются ***независимыми,*** а во втором **–** ***зависимыми.*** В качестве примера рассмотрим модель урны с белыми и черными шарами. Тогда событие ***A***–из урны извлечен белый шар, событие ***B*** **–** из урны извлечен черный шар. После того, как был извлечен белый шар, можно вернуть шар в урну, а можно и не возвращать. В первом случае перед вторым испытанием мы возвращаем систему в исходное состояние, и, следовательно, второе испытание (извлечение второго шара) будет независимо от первого. Во втором случае, когда мы не возвращаем шар, ситуация изменится: количество шаров в урне изменится, и изменится соотношение белых и черных шаров в урне, а следовательно, в этом случае изменятся вероятности, характеризующие события ***A*** и ***B***.

Вероятность события А, вычисленная при условии, что имело место другое событие ***B***, называется ***условной вероятностью события A*** и обозначается ***P(A/B)***.

Задача:

К экзамену студент выучил только 20 билетов из 30. Какова вероятность, что ему достанется невыученный билет (событие А)? Изменится ли вероятность этого события, если раньше другой студент уже вытащил один билет из тех, что не выучен первым студентом (событие В)?

Дано: ***Решение***

n=30

m_1=10

P(B/A)-?

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3},$$

$$P\left(B/_{A}\right)=\frac{m-1}{n-1}=\frac{10-1}{30-1}=\frac{9}{29}.$$

2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Теорема сложения вероятностей

Пусть дана полная группа событий ***A,B,C,D***, которым соответствуют частоты (вероятности) $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{8}$. Какова вероятность, что в результате испытания произойдет событие ***A или B***? В этом вопросе подразумевается, что благоприятный исход испытания состоит в осуществлении события ***A*** или в осуществлении события ***B***. Символически это можно записать ***P(A или B)***. Очевидно, что искомая вероятность должна быть больше вероятности осуществления события ***A*** и большее вероятности осуществления события В.

Допустим, что было проведено n испытаний, в которых в m_1 случаях осуществилось событие ***A***, а в m_2 случаях событие ***B***. Всего благоприятных для осуществления события ***A*** или события ***B*** случаев было m_1+m_2, а частота (вероятность) осуществления события ***A*** или события ***B*** соответственно равна $\frac{m_1+m_2}{n}$, то есть

$$P\ (A\ или\ B) = \frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B);$$

Полученное выражение иллюстрирует ***теорему сложения вероятностей:*** Вероятность наступления в некотором испытании какого–либо одного события (безразлично какого именно) $A_1, A_2, ..., A_n$ равна сумме вероятностей этих событий, если события несовместны:

$$P(A_1\ или\ A_2\ или\ \ldots\ A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n);$$

Следствие 1: Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Задача:

Вероятность наступления хотя бы одного вызова врача в течение часа ***P(A)=0,85***. Найти вероятность того, что в течение часа не последует вызова (событие B).

Дано: ***Решение:***

Дано	Решение
$P(A)=0{,}85$	Событие B является противоположным событию A.
$P(B)=?$	Сумма их вероятностей

$P(A) + P(B) = 1,$

откуда $P(B)=1–P(A)=1–0{,}85=0{,}15.$

Следствие 2: Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна 1:

$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1$, или

$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$ - Данное выражение называют ***условием нормировки.***

Задача:

Медсестра обслуживает три палаты. Вероятность поступления вызова из первой палаты–0,2, из второй–0,4. Какова вероятность того, что ближайший вызов будет из третьей палаты?

Дано: ***Решение:***

Дано	Решение
$P(A)=0{,}2$	Согласно условию нормировки, $P(A)+P(B)+P(C)=1$,
$P(B)=0{,}4$	тогда $P(C)=1–P(A)–P(B)$
$P(C)$-?	$P(C)=1–0{,}2–0{,}4=0{,}4.$

2. Теорема умножения вероятностей

Предположим, что проводится испытание, заключающееся в бросании правильно выполненного игрального кубика два раза подряд. Возможные результаты такого испытания представим в виде таблицы:

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

В каждой ячейке таблицы первая цифра – результат первого бросания, вторая цифра – результат второго бросания.

Как видно из таблицы, возможны 36 вариантов исхода двукратного бросания кубика. Попробуем рассчитать вероятность выпадения два раза подряд числа 6. Для правильно выполненного кубика все приведенные в таблице исходы равновероятны и, следовательно, выпадение двух шестерок, как и выпадение любой другой пары одинаковых чисел, имеет вероятность, равную $\frac{1}{36}$. Но $\frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$, то есть вероятность выпадения подряд двух шестерок равна произведению вероятности выпадения числа 6 на самое себя. Данный пример иллюстрирует ***теорему умножения вероятностей***: вероятность совместного появления независимых событий равна произведению их вероятностей.

Для случая двух независимых событий *А и В:*

$$P(A \text{ и } B)=P(A)\cdot P(B).$$

Так как события ***А*** и ***В*** независимы, то каждому из $\boldsymbol{m_1}$ случаев, благоприятствующих событию ***А***, соответствуют $\boldsymbol{m_2}$ случаев, благоприятствующих событию ***В***. Таким образом, общее число случаев, благоприятствующих появлению событий ***А и В***, равно, $\boldsymbol{m_1 \cdot m_2}$ а общее число равновозможных событий равно $\boldsymbol{n_1 \cdot n_2}$, где $\boldsymbol{n_1}$ и $\boldsymbol{n_2}$ – числа равновозможных событий соответственно для ***А*** и ***В***. Отсюда вероятность совместного появления событий равна: $\mathrm{P(A\ и\ B)} = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \mathrm{P(A) \cdot P(B)}$.

Теорема умножения вероятностей усложняется, если определяется вероятность события, состоящего из совместного появления двух зависимых событий.

Вероятность наступления в некотором испытании одновременно двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое события имело место:

$$P(A \text{ и } B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B) \text{ – \textbf{\textit{формула Байеса}}}$$

При решении задач необходимо:

1. Выяснить, являются ли эти события независимыми или зависимыми;
2. Определить вероятности каждого отдельного события;
3. Определить вероятность одновременного наступления этих событий.

Задача:

В урне находится 10 белых и 20 черных шаров. Определить вероятность вынимания двух белых шаров подряд.

Дано: *Решение:*

$m_1=10$	Вероятность вынимания первого белого шара равна
$m_2=20$	$P(A)=\frac{m_1}{n}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}\approx 0.33$
$n=m_1+m_1=30$	Вероятность вынимания второго белого шара равна:
$P(A\ и\ B)$-?	$P(B/A)=\frac{m_1-1}{n-1}=\frac{10-1}{30-1}=\frac{9}{29}\approx 0{,}31$

Тогда вероятность вынимания двух белых шаров подряд будет:

$P(A\ и\ B)=P(A)\cdot P(B/A)=0{,}33\cdot 0{,}31\approx 0{,}1$

Задача:

Считая, что рождение девочки или мальчика – это независимые и равновозможные события, определить вероятность появления в семье подряд трех девочек.

Дано: *Решение:*

$P(D)=0{,}5$	Согласно теореме умножения вероятностей для
$P(D_1\ и\ D_2\ и\ D_3)$-?	независимых событий:

$P(D_1\ и\ D_2\ и\ D_3)=[P(D)]^3=0{,}5^3=0{,}125$ (12,5%)

Эталоны решения типовых задач

Задача №1. Проводившиеся в некотором районе многолетние наблюдения показали, что из 50000 двадцатилетних граждан до 50 лет доживает в среднем 18120 человек, до 80 лет-724. Найти вероятности для двадцатилетних и пятидесятилетних дожить до 80 лет.

Решение.

Дано: *Решение:*

$n=50000$	Вероятность дожить до 80 лет 20-летному гражданину $P(A_1)$
$m_1=18120$	равна:
$m_2=724$	$P(A_1)=\frac{m_2}{n}=\frac{724}{50000}\approx 0{,}14\approx 1{,}4\%$
$P(A_1)$-?	Вероятность дожить пятидесятилетному до 80 лет $P(A_2)$ равна:
$P(A_2)$-?	$P(A_2)=\frac{m_2}{m_1}=\frac{724}{18120}=0{,}040\approx 4{,}0\%$

Ответ: $P(A_1)=1{,}4\%$ $P(A_2)=4\%$

Задача №2. Вероятность вызова врача в течение часа $P(A)=0{,}47$. Найти вероятность, что в течение часа вызова врача не последует.

Дано: *Решение:*

P(A)=0,47	Сумма вероятностей двух противоположных событий равна 1:
$P(\overline{A})$*-?*	$P(A)+P(\overline{A})=1$

Отсюда: $P(\overline{A})=1-P(A)$

$P(\overline{A})=1-0{,}47=0{,}53$

Ответ: $P(\overline{A})=0{,}53$

Задача №3. Аптечный склад получает лекарства из городов *A,B,C* и *Д*. Вероятность поступления лекарств из города *А* - *P(A)=0,11;* из города *В* – *P(B)=0,28* и из города *Д* – *P(Д)=0,32*. Найти вероятность поступления лекарств из города *С*.

Дано:	***Решение:***
P(A)=0,11	Сумма вероятностей событий, составляющих полную
P(B)=0,28	систему, равна единице (условие нормировки)
P(Д)=0,32	*P(A)+P(B)+P(C)+P(Д)=1*
P(C)-?	*P(C)=1-(P(A)+P(B)+P(Д))=1-(0,11+0,28+0,32)=1-0,71=0,29*

Ответ: *P(C)=0,29=29%*

Задача №4. На обследование прибыла группа из 50 человек. Семеро из них больны. В кабинет врача приглашали по 2 человека. Найти вероятность того, что:

а) оба больны,

б) оба здоровы,

в) один болен, один здоров.

Дано:	***Решение:***
n=50	а) Пусть *P(A)* вероятность того, что первый
m=7	вошедший болен, а *P(B)* – второй вошедший болен. *P(A и B)-?*
P(A и B, или C и Д)-?	События *A* и *B* зависимые.

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{7}{50}$$

$$P\left(B/_{A}\right)=\frac{m-1}{n-1}=\frac{7-1}{50-1}=\frac{6}{49}$$

$$P(A\text{ и }B)=P(A)\cdot P\left(B/_{A}\right)=\frac{7}{50}\cdot\frac{6}{49}=0{,}017$$

б) *A*- первый здоров, *B*-второй здоров.

$$P(A)=\frac{n-m}{n}=\frac{50-7}{50}=\frac{43}{50}$$

$$P\left(B/_A\right)=\frac{n-m-1}{n-1}=\frac{42}{49}$$

$$P(A\ и\ B)=P(A)\ P\left(B/_A\right)=\frac{43}{50}\cdot\frac{42}{49}=0{,}74$$

в) *Первая ситуация:*

А-первый болен, *В*- второй здоров

$$P(A)=\ \frac{m}{n}=\frac{7}{50}$$

$$P\left(B/_A\right)=\frac{n-m}{n-1}=\frac{50-7}{49}=\frac{43}{49}$$

$$P(A\ и\ B)=P(A)\ P\left(B/_A\right)=\frac{7}{50}\cdot\frac{43}{49}=0{,}12$$

Вторая ситуация:

С-первый здоров, *Д*- второй болен

$$P(C)=\frac{n-m}{n}=\frac{50-7}{50}=\frac{43}{50}=0{,}86$$

$$P\left(Д/_C\right)=\frac{m}{n-1}=\frac{7}{49}=0{,}14$$

$$P(C\ и\ Д)=P(C)\ P\left(Д/_C\right)=\frac{43}{50}\cdot\frac{7}{49}=0{,}12$$

Общая вероятность равна:

Р(А и *В*, или *С* и *Д*)=*Р(А* и *В*)+*Р(С* и *Д*)=0,12+0,12=0,24

Ответ: а. *Р(А и В)=0,017*

б. *Р(А и В)=0,74*

в. *Р(А и В, или С и Д)=0,24*

Задача №5. Из 20 ампул с лекарственными препаратами ёмкостью по 2 мл в 5 ампулах количество препарата отличалось от нормы. Какова вероятность, что из трёх наугад взятых ампул хотя бы одна окажется нестандартной?

Дано:	***Решение:***
n=20	Задача решается от противного. Противоположными будут
m=5	события, что во всех трёх ампулах лекраственного препарата
$P(\overline{A})-?$	содержится в норме (2мл).

Вероятность, что в первой ампуле содержится норма препарата:

$$P(A_1)=\frac{n-m}{n}=\frac{20-5}{20}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4};$$

во второй:

$$P(A_2) = \frac{n-m-1}{n-1} = \frac{14}{19};$$

в третьей:

$$P(A_3) = \frac{n-m-2}{n-2} = \frac{13}{18}.$$

Вероятность, что во всех трёх ампулах содержится норма лекраственного препарата:

$$P(A)=P(A_1 \text{ и } A_2 \text{ и } A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)= \frac{3}{4}\cdot\frac{14}{19}\cdot\frac{13}{18} \approx 0{,}399 \approx 0{,}4$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$$

Ответ: $P(\overline{A}) = 0{,}6$

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Задачи для домашнего решения

1. В партии из 100 ампул 10 оказались с трещинами. Определить вероятность попадения ампулы с трещиной.
2. При обследовании 65 студентов у 17 был выявлен сколеоз и у 9 остаточные явления после пневмонии. Определить вероятность того и другого заболевания.
3. У больного желудочное кровотечение. Этот симптом может наблюдаться при язвенной эрозии сосуда (событие А), разрыве варикозно расширенных вен пищевода (В), раке желудка (С), полипе желудка (Д), механической желтухе (Е), гастрите (F), геморрагическом диатезе (G). За время практики у врача было 80 случаев с аналогичными симптомами, причём во всех случаях был поставлен правильный диагноз. Число случаев каждой болезни составило соответственно: 12, 6, 36, 9, 7, 9 и 1. Найти вероятности появления этих заболеваний.
4. При розыгрыше спортлото в барабане находятся 35 пронумерованных шаров. Определить вероятность событий:
   а) появление шара с цифрой 5 при первом метании – событие ***А***,
   б) появление шара с цифрой 5 при втором метании (шар обратно не возвращается) - событие *В*,
   в) появление шаров с цифрами 5 и числами 10 и числами 15 при первом метании - событие *С*,
   г) появление шара с чётным числом при первом метании–событие *Д*.
5. В партии из 12 приборов 3 бракованных. Найти вероятность того, что:

а) первый наугад взятый прибор – бракованный (событие А),

б) второй прибор – исправный (событие В).

6. Медицинская сестра обслуживает 4 больничные палаты. Вероятность, что в течение часа её помощь потребуется в первой палате $P(A_1)$ равна 0,11; в третьей - $P(A_3)$=0,40; в четвертой – $P(A_4)$=0,08. Найти вероятность, что её помощь в течение часа потребуется больным второй палаты.
7. Вероятность рождения мальчика в семье равна 0,4. В семье 4 детей. Определить вероятность, что в семье все дети – девочки.
8. На складе клиники имеется 20 электрокардиографов. У 5 из них имеются неисправности. Какова вероятность того, что из трех наугад взятых приборов хотя бы один окажется неисправным.

Задачи для решения на практическом занятии:

1. В отделении 4 палаты. Вероятность того, что в течении ночи в первую палату потребуется кислородная подушка – 0,2; во вторую – 0,3; в третью – 0,4; в четвертую – 0,1. Какова вероятность того, что в течение ночи кислородная подушка потребуется: 1) в первую и во вторую палаты; 2) во все четыре палаты.
2. Согласно статистическим данным, европейцы имеют группу крови А – 36,9 % всего населения; группу В – 23,5 %; группу АВ – 0,6 %; группу О – 39 %. Найти вероятность того, что у произвольно взятого донора группа крови А или В.
3. Во время гололеда в травмпункт было доставлено 23 пострадавших, причем у четырех была повышенная температура. В палаты их размещали по 3 человека. Найти вероятность, что в одну палату все пострадавшие попадут с повышенной температурой.
4. При аварии пострадали 15 человек, 7 из них получили ожоги. Скорая помощь увозила по 2 пострадавших. Найти вероятность того, что в машине окажутся:

   а) оба пострадавших с ожогами,

   б) оба пострадавших без ожога,

   в) один с ожогом, другой без ожога.
5. Студент пришёл на экзамен, зная ответы на 90 из 150 экзаменационных вопросов. В билете три вопроса. Какова вероятность, что студент ответит на все три вопроса билета?
6. Студент из 120 экзаменационных вопросов знал ответы на 75. В билете три вопроса. Какова вероятность, что студент не ответит на один из вопросов билета?

7. Студент пришёл на экзамены, зная 20 вопросов из 24. В билете 3 вопроса. Найти вероятность того, что ему попадётся в билете хотя бы один вопрос, который он не знает.
8. На обследование прибыла группа из 25 человек, среди которых 7 инфицированных больных. Одновременно в кабинет проходило по 3 человека. Какова вероятность,что в группе из 3 человек, хотя бы один окажется инфицированным?

ТЕМА №8
СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ЗАКОН НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Многие случайные события могут быть оценены количественно случайными величинами. **Случайной величиной** называется величина, которая в результате испытания может принять то или иное значение, причем неизвестно заранее, какое именно. Полными, исчерпывающими характеристиками случайных величин являются так называемые законы распределения. **Законом распределения** случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Цель занятия:

1. Изучить законы распределения и методы вычисления числовых характеристик случайных величин.
2. Изучить нормальный закон распределения случайных величин и метод вычисления вероятности при нормальном распределении.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Величина, принимающая те или иные числовые значения в зависимости от различных случайных обстоятельств, называется случайной величиной. Случайными величинами являются: число больных на приеме у врача, число студентов в аудитории, число рождений в городе, продолжительность жизни отдельного человека, температура воздуха и др.

Различают дискретные и непрерывные случайные величины. Случайная величина, принимающая отдельные, изолированные числовые значения, называется ***дискретной*** или прерывной (например, число студентов на лекции, число случаев заболеваний, число родившихся за один день мальчиков и др.).

Случайная величина, принимающая любые значения в определенном интервале, называется ***непрерывной*** (например, температура тела больного, продолжительность жизни человека, температура воздуха в течение дня и т.д.).

2. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Случайные величины обозначают прописными буквами латинского алфавита: $X, Y, Z, \ldots$, а их возможные значения – соответствующими строчными буквами $x, y, z \ldots$.

Рассмотрим дискретную случайную величину $\boldsymbol{X}$ с возможными значениями $\boldsymbol{x_1, x_2,\ldots, x_n}$. Величина $\boldsymbol{X}$ может принять каждое из них с некоторой вероятностью. В результате испытания величина $\boldsymbol{X}$ примет одно из этих значений, т.е. произойдет одно из полной группы несовместных событий. Обозначим вероятности этих событий буквами P с соответствующими индексами: $\boldsymbol{P(X=x_1)=P_1, P(X=x_2)=P_2,\ldots,P(X=x_n)=P_n}$.

Так как все возможные значения дискретной случайной величины представляют ***полную группу,*** то сумма вероятностей равна единице:

$$\boldsymbol{P_1+P_2+\ldots+P_n}=\sum_{i=1}^{n} P(x_i)=1 \text{ - условие нормировки.}$$

Дискретная случайная величина X считается заданной, если перечислены все ее возможные значения и вероятности, с которыми она может принимать эти значения.

Законом распределения дискретной случайной величины называется соответствие между ее возможными значениями и их вероятностями.

Закон распределения дискретной случайной величины может быть представлен в виде таблицы, в которой перечислены возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности:

Значения случайной величины, x_i	x_1	x_2	…	x_n
Вероятности, P_i	P_1	P_2	…	P_n

Такую таблицу называют **рядом распределения** случайной величины X.

Ряд распределения можно представить графически: по оси абсцисс откладываются возможные значения случайной величины, а по оси ординат – вероятности этих значений, и для наглядности полученные точки соединяются отрезками прямых (рис. 1). Такая фигура называется **многоугольником распределения**. Многоугольник распределения полностью характеризует случайную величину и является одной из форм закона распределения.

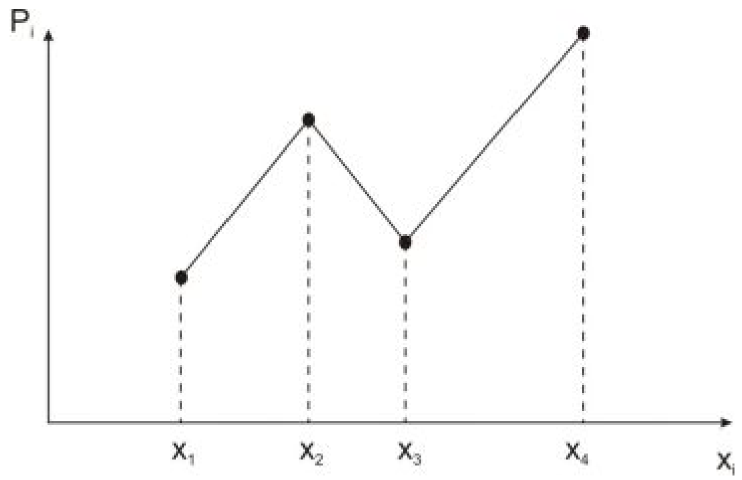


Рис 1. Многоугольник распределения.

3. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Закон распределения непрерывной случайной величины невозможно описать с помощью таблицы, в которой были бы перечислены все возможные значения этой величины и их вероятности. Однако различные области возможных значений случайной величины не являются одинаково вероятными. Для количественной характеристики этого распределения рассматривают не вероятность события ***X=x***, а вероятность события ***X<x***, где ***x*** – некоторая текущая переменная. Вероятность этого события зависит от ***x***, т.е. является некоторой функцией распределения случайной величины ***X*** и обозначается ***F(x):***

$$F(x)=P(X<x)$$

Функция распределения полностью характеризует случайную величину с вероятностной точки зрения, т.е. является одной из форм закона распределения. Она существует для всех случайных величин как дискретных, так и непрерывных.

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Если рассматривать случайную величину ***X*** как случайную точку ***X*** на оси ***Ox***, которая в результате испытания может занять то или иное положение, тогда функция распределения ***F(x)*** есть вероятность того, что случайная точка ***X*** в результате испытания попадет левее точки x (рис 2.).

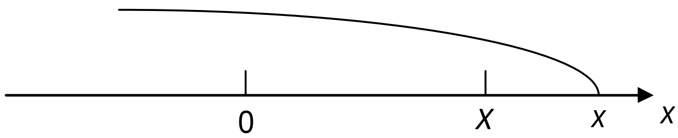


Рис 2. Геометрическая интерпретация функции распределения.

5. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Как и всякая вероятность, функция распределения не может быть отрицательной и больше единицы:

$$0 \le F(x) \le 1$$

2. Вероятность попадания случайной величины на заданный отрезок ***(a, b)*** равна приращению функции распределения на этом отрезке:

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$$

3. Вероятность того, что непрерывная случайная величина ***X*** примет какое-либо заранее заданное значение, равна нулю:

$$P(X = a) = 0$$

В этом можно убедиться, если рассматривать вероятность попадания случайной величины на заданный отрезок ***(a,b)*** при неограниченном уменьшении этого отрезка ***(b***$\rightarrow$***a.)*** В пределе вместо вероятности попадания случайной величины на отрезок получим вероятность того, что величина примет отдельно взятое значение ***a***:

$$P(X=a)=\lim_{b\to a}(a\le X<b)=\lim_{b\to a}\left[F(b)-F(a)\right]$$

Если функция $F(x)$ в точке a непрерывна, то этот предел равен нулю.

4. Если возможные значения случайной величины принадлежат отрезку $(a,\ b)$, то $F(x)=0$ при $x\le a$;

$F(x)=1$ при $x\ge b$.

Пусть $x_1\le a$. Тогда событие $X<x_1$ невозможно.

Следовательно, $F(x)=P(X<x_1)=0$.

Пусть $x_2\ge b$. Тогда событие $X<x_2$ достоверно.

Следовательно, $F(x)=P(X<x_2)=1$.

6. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Вследствие того, что вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю, практической мерой вероятности данного значения ***x*** может служить вероятность того, что случайная величина примет значение в бесконечно малом интервале ***(x, x+***Δ***x).***

Пусть имеется непрерывная случайная величина ***X*** с непрерывной и дифференцируемой функцией распределения ***F(x).*** Вычислим вероятность попадания этой случайной величины в интервал ***(x, x+***Δ***x):***

$$P(x<X<x+\Delta x)=F(x,x+\Delta x)-F(x)$$

Рассмотрим отношение этой вероятности к длине интервала Δ***x*** и будем приближать значение Δ***x*** к нулю. В пределе получим производную от функции распределения:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=F^{/}(x)$$

Введем обозначение $f(x)=F^{/}(x)$.

Функция ***f(x)***, являющаяся производной функции распределения, называется ***плотностью распределения*** (плотностью вероятности) непрерывной случайной величины *X*.

Плотность распределения – неотрицательная функция: $f(x)\ge 0$.

В противоположность функции распределения плотность распределения существует только для непрерывных случайных величин.

Рассмотрим непрерывную случайную величину ***X*** с плотностью распределения ***f(x)*** и бесконечно малый интервал ***dx***, примыкающий к точке ***x*** (рис. 3). Вероятность попадания случайной величины *X* в этот бесконечно малый интервал равна ***f(x)dx***. Величина ***f(x)dx*** называется элементом вероятности. Геометрически это есть площадь прямоугольника, опирающего на отрезок ***dx***.

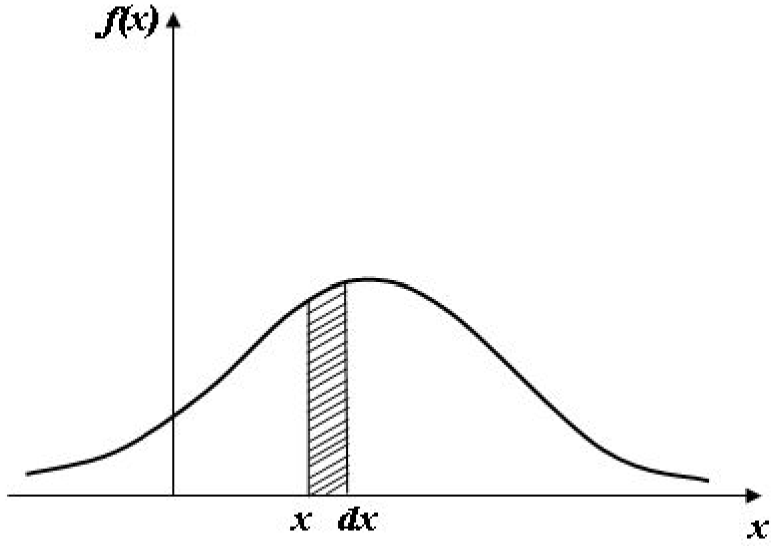


Рис 3. Площадь элементарного прямоугольника, опирающегося на отрезок dx, численно равна элементу вероятности.

Выразим вероятность попадания величины ***X*** на отрезок ***(a,b)*** через плотность распределения. Она равна сумме элементов вероятности на всем этом отрезке, т.е. интегралу:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx \qquad (*)$$

Геометрически вероятность попадания величины ***X*** на отрезок ***(a,b)*** равна площади, ограниченной кривой ***f(x)***, осью абсцисс и перпендикулярами в точках ***x=a*** и ***x=b*** (Рис. 4)

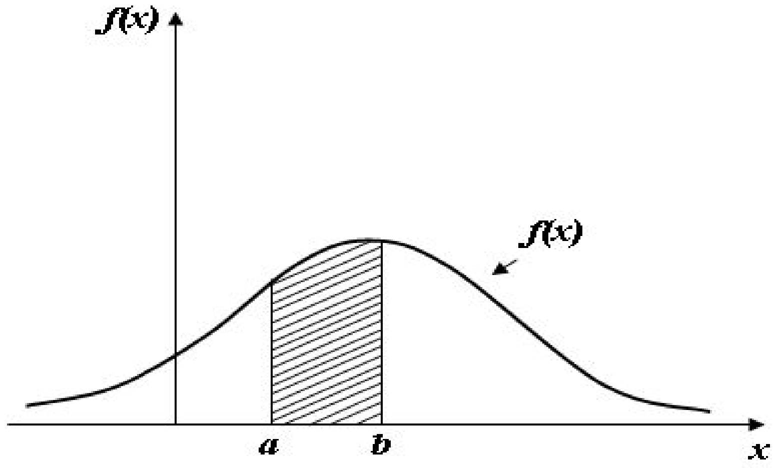


Рис 4. Площадь заштрихованной фигуры численно равна вероятности попадания величины X на отрезок (а, в).

Выразим функцию распределения через плотность распределения. По определению $F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x)$, откуда по формуле (*) имеем:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Геометрически ***F(x)*** **–** это площадь под кривой ***f(x)***, расположенная левее ***x*** (рис. 5).

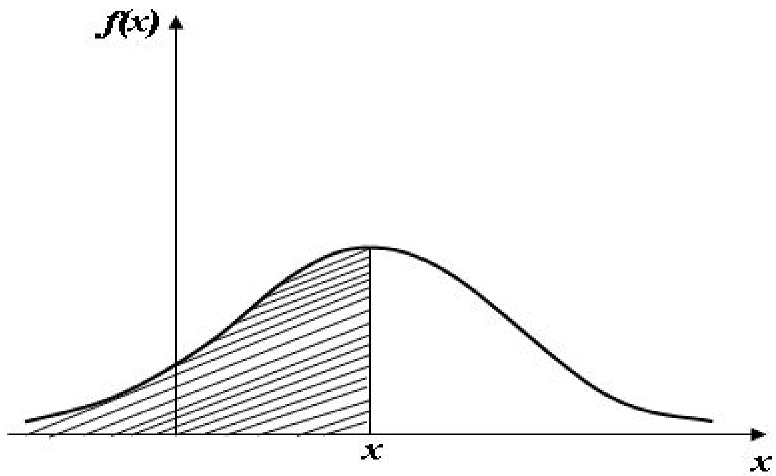


Рис 5. Площадь заштрихованной фигуры численно равна вероятности события X<x.

Интеграл в бесконечных пределах от плотности распределения равен единице:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ - Это условие нормировки плотности вероятности.

Геометрически это означает, что полная площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс, равна единице.

7. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Закон распределения случайной величины представляет собой некоторую функцию, которая полностью описывает случайную величину с вероятностной точки зрения. Однако при решении многих практических задач нет необходимости характеризовать случайную величину полностью, исчерпывающим образом. Во многих случаях достаточно бывает указать отдельные числовые параметры, в определенной степени характеризующие наиболее существенные особенности распределения случайной величины: например, какое-то среднее значение, около которого группируются возможные значения случайной величины; какое-либо число, характеризующее степень разбросанности этих значений относительно среднего и т.д.

Такие характеристики, которые в сжатой форме выражают наиболее существенные особенности распределения, называют ***числовыми характеристиками*** случайной величины. К их числу относятся математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины ***X*** называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины ***X*** на вероятности этих значений.

Математическое ожидание обозначают ***M(X)*** или $\boldsymbol{\mu}$:

$$M(X) = \mu = x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + ... + x_nP_n = \sum_{i=1}^{n} x_iP_i$$

Математическое ожидание приближенно равно (тем точнее, чем больше число испытаний) среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины:

$$M(X) \approx \bar{x}$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины ***X***, возможные значения которой принадлежат отрезку [***a,b***], называют величину определенного интеграла:

$$M(X) = \mu = \int_a^b xf(x)dx,$$

где x – непрерывно изменяющаяся случайная величина,

$f(x)dx$ – элемент вероятности.

Если возможные значения x принадлежат всей оси ***Ox***, то

$$M(x) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

8. СВОЙСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ

1. Математическое ожидание постоянной величины C равно этой постоянной: $M(C)=C$.
2. Постоянный множитель C можно выносить за знак математического ожидания: $M(CX)=CM(X)$.
3. Математическое ожидание алгебраической суммы случайных величин равно алгебраической сумме их математических ожиданий:
$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$$
4. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:
$$M(XY)=M(X)\cdot M(Y)$$

Математическое ожидание характеризует ***положение*** случайной величины на числовой оси, т.е. указывает некоторое среднее, ориентировочное значение, около которого группируются все возможные значения случайной величины.

Кроме математического ожидания на практике иногда применяют и другие характеристики положения **–** ***моду*** и ***медиану*** случайной величины.

Модой (Мо) называется наиболее вероятное значение случайной величины или значение величины с наибольшей частотой появления.

Если многоугольник распределения (кривая распределения) имеет более одного максимума, распределение называют соответственно двумодальным или многомодальным .

В общем случае мода и математическое ожидание случайной величины не совпадают. В частном случае, когда распределение является симметричным и модальным (т.е. имеет моду) и существует математическое ожидание, то оно совпадает с модой и центром симметрии распределения.

Медианой (Ме) называется значение варианты, стоящей в центре вариационного ряда, т.е. эта варианта делит вариационный ряд на две равные по числу значений части при условии, что объем выборки есть нечетное число. Если объем выборки четной число то медиана определяется полусуммой двух вариант, стоящих в центре вариационного ряда.

Например:

x	3,4	3,9	4,4	4,9	5,4	5,9	6,4	***n***=7

***Ме*=4,9**

x	3,4	3,9	4,4	4,9	5,4	5,9	6,4	6,9	***n***=8

$$\text{Me} = \frac{4,9 + 5,4}{2} = 5,15$$

Геометрически медиане соответствует абсцисса точки, в которой площадь, ограниченная кривой распределения, делится пополам.

В случае симметричного модального распределения медиана совпадает с математическим ожиданием и модой.

Для краткого описания случайной величины нужно знать степень рассеяния (разброса) ее значений около математического ожидания. Для оценки рассеяния проще всего было бы вычислить все возможные отклонения случайной величины от ее математического ожидания и затем найти их математическое ожидание. Найдем математическое ожидание отклонения:

$$M(X - M(X) = \sum_{i=11}^{n}[x_i - M(X)]P_i = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i - \sum_{i=1}^{n} M(X)P_i =$$

$$= M(X) - M(X)\sum_{i=1}^{n} P_i = M(X) - M(X)\cdot 1 = 0$$

Итак, математическое ожидание отклонения равно нулю. Поэтому величину рассеяния случайной величины относительно ее математического ожидания определяют с помощью числовой характеристики, называемой ***дисперсией.***

Дисперсией дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата разности случайной величины ***X*** и ее математического ожидания ***M(X):***

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Дисперсию обозначают ***Д(X),*** или $\sigma^2(X)$, или σ^2.

Для дискретной случайной величины дисперсия равна сумме произведений квадратов отклонений значений случайной величины от ее математического ожидания на соответствующую вероятность:

$$Д(X) = \sum_{i=1}^{n}[x_i - M(X)]^2 \cdot P_i.$$

Дисперсией непрерывной случайной величины Х, возможные значения которой принадлежат отрезку [а,в], называют величину определенного интеграла:

$$Д(X) = \sigma^2 = \int_a^в [x_i - M(X)]^2 f(x)dx,$$

где ***f(x)*** – плотность вероятности.

Если возможные значения случайной величины принадлежат всей оси ***Ox,*** то дисперсия равна:

$$Д(x)=\sigma^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx.$$

9. СВОЙСТВА ДИСПЕРСИИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

1. Дисперсия постоянной величины С равна нулю:

$$Д(C)=0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$Д(CX)=C^2Д(X).$$

3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$Д(X+Y)=Д(X)+Д(Y).$$

4. Дисперсия разности двух независимых случайных величин Х и У равна сумме их дисперсий:

$$Д(X-Y)=Д(X)+Д(Y)$$

5. Дисперсия случайной величины равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания:

$$Д(X)=M(X^2)-[M(X)]^2.$$

10. СРЕДНЕЕ КВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины. В тех случаях, когда нужно иметь числовую характеристику рассеяния возможных значений в той же размерности, что и сама случайная величина, используют среднее квадратическое отклонение.

Средним квадратическим отклонением случайной величины называют корень квадратный из её дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{Д(X)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(x))^2 P_i}.$$

11. НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Большая часть встречающихся на практике случайных величин подчиняется нескольким законам распределения. Для дискретных случайных величин – это распределение Бернулли (биномиальное), Пуассона, а для непрерывных - Гаусса, Максвелла, Больцмана и другие.

В медико-биологических исследованиях огромную роль играет нормальный закон распределения (закон Гаусса). При действии большого числа случайных факторов, каждый из которых сам по себе оказывает независимо от других незначительное действие на случайную величину, последняя подчиняется закону Гаусса. Так, например, закону Гаусса подчиняются: рост и вес людей; артериальное давление крови, длина сосудов, размеры органов, вес и объем мозга, содержание ферментов у людей и др.

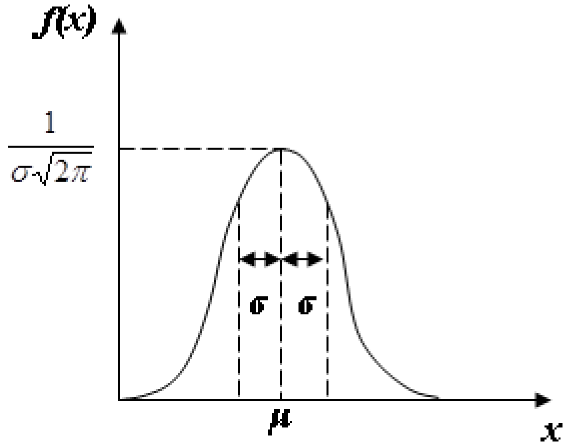
Для нормального распределения, имеющего математическое ожидание μ и среднее квадратическое отклонение *σ*, плотность распределения имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

а функция распределения вероятности равна:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \qquad (*)$$

Представим закон графически:



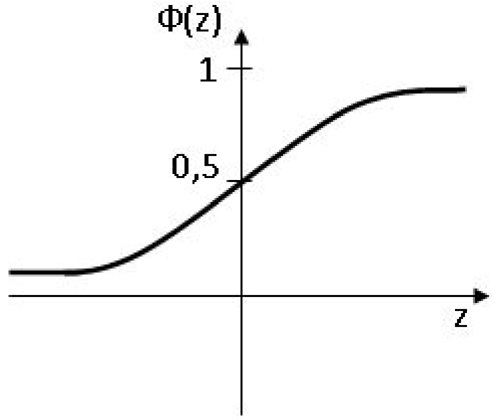
Для перехода от двух параметров распределения μ и σ к одному делают замену переменной:

z=$\frac{x-\mu}{\sigma}$; zσ=x-μ; dx=σdz

Подставив эти значения в функцию распределения (*), получаем:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}}\cdot\sigma dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\Phi(z)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Значение функции Ф(z) обычно находят в специально составленных таблицах. График функции Ф(z) имеет вид:



Вероятность того, что значение случайной величины попадает в интервал от *a* до *b*, определяется равенством:

$$P(a < x < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

При этом значение функции находят по таблице. Значения функции

$\Phi(-z)=1-\Phi(z)$

12. СВОЙСТВА НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Функция плотности нормального распределения определена на всей оси *Ox*, т.е. каждому значению *x* соответствует вполне определенное значение функции.
2. При всех значениях *x* функция плотности принимает положительные значения, т.е. нормальная кривая расположена над осью *Ox*.
3. Предел функции плотности при неограниченном возрастании *x* равен нулю $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$,

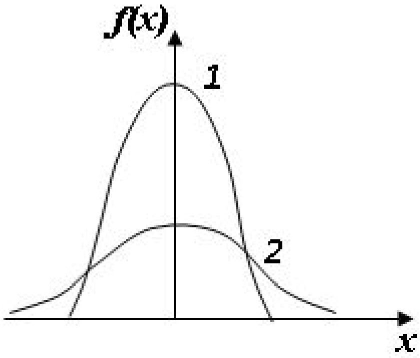
т.е. ветви кривой асимптотически приближающей к оси *Ox*.

4. Функция плотности в точке $x=\mu$ имеет максимум равный:

$$f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

5. График функции плотности *f(x)* симметричен относительно прямой $x=\mu$.
6. С ростом σ кривая распределения сжимается к оси абсцисс и растягивается вдоль неё.

$\sigma_2 > \sigma_1$



Для решения задач по нахождению ***М(х)***, ***Д(х)*** и ***σ(х)***, а так же для расчета вероятности попадания случайной величины в заданной интервал для удобства необходимо составлять следующие таблицы:

Значение случайной величины x_i	x_1	x_2	…	x_n	
Число случаев m_i	m_1	m_2	…	m_n	$\sum m_i = n$
Вероятность $P_i = \frac{m_i}{n}$	P_1	P_2	…	P_n	Условие нормировки $\sum P_i = 1$
Произведения x_iP_i	x_1P_1	x_2P_2	…	x_nP_n	$\sum_{i=1}^{n} x_iP_i = M(x)$
Квадраты отклонений сл. величины от мат. ожид. $(x_i - M)^2$	$(x_1 - M)^2$	$(x_2 - M)^2$	…	$(x_n - M)^2$	—
Произведения $(x_i - M)^2 P_i$	$(x_1 - M)^2 P_1$	$(x_2 - M)^2 P_2$	…	$(x_n - M)^2 P_n$	$\sum_{i=1}^{n} (x_i - M)^2 \cdot P_i = D(x)$

Эталоны решения типовых задач

Задача №1: В течение 10 минут на диспетчерский пункт может поступить 0 вызовов с вероятностью 0,2; 1 вызов с вероятностью 0,2; 2 вызова с вероятностью 0,4; 3 вызова с вероятностью 0,1; 4 вызова с вероятностью 0,1. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа вызовов за 10 минут.

Решение: Для решения удобно составить таблицу:

Число вызовов x_i	0	1	2	3	4	$\sum$
Вероятность P_i	0,2	0,2	0,4	0,1	0,1	1
x_iP_i	0	0,2	0,8	0,3	0,4	1,7
$(x_i - M)^2$	2,89	0,49	0,09	1,69	5,29	-
$(x_i - M)^2 P_i$	0,578	0,098	0,036	0,169	0,529	1,41

$$M(x) = \sum_{i=1}^{5} x_i P_i = 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}1 = 1{,}7$$

$$Д(x) = \sum_{i=1}^{5} (x_i - M)^2 P_i = 1{,}41$$

$$\sigma = \sqrt{Д(x)} = \sqrt{1{,}41} = 1{,}2$$

Задача №2. Амплитуда вызванных биопотенциалов мозга *(мкВ)* x_i появилась с частотой m_i:

Амплитуда биопотенциалов (мкВ) (x_i)	2,3	4,0	7,4	4,5	6,7	10,0	9,2
m_i	2	6	10	8	4	2	3

Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и вероятность, что величина амплитуды вызванного биопотенциала мозга $\Delta\varphi \leq 5$ *мкВ*.

Решение

Для нахождения математического ожидания М дискретного ряда распределения используем формулу:

$$M = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i,$$

где x_i-значения вариант ряда;

P_i - вероятность (относительная частота появления варианты).

Вероятность P_i - определяем по формуле:

$P_i = \dfrac{m_i}{n}$, где n-объем выборки, равный $\sum_{i=1}^{n} m_i$

m_i-частота появления ***i*** варианты.

Дисперсию ***Д*** определяем по формуле:

$$Д = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M)^2 P_i$$

Среднее квадратическое отклонение σ определяем по формуле:

$$\sigma = \sqrt{Д}$$

Заполним таблицу:

x_i (мкВ)	2,3	4,0	7,4	4,5	6,7	10,0	9,2	
m_i	2	6	10	8	4	2	3	$n = \sum_{i=1}^{n} m_i = 35$
$P_i = \frac{m_i}{n}$	0,06	0,17	0,29	0,23	0,11	0,06	0,09	$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1{,}01 \approx 1$ (условие нормировки)
x_i P_i	0,14		2,15	1,04	0,74	0,60	0,83	$M = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i = 6{,}18 \approx 6{,}2(мкв)$
$(x_i - M)^2 P_i$	0,91	0,82	0,42	0,66	0,03	0,87	0,81	$Д = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M)^2 P_i = 4{,}52(мкв)^2$

Определяем среднее квадратическое отклонение σ:

$$\sigma = \sqrt{Д} = \sqrt{4{,}52} = 2{,}13 \text{ (мкВ)}.$$

Находим вероятность того, что значение биопотенциала мозга Δφ≤5 *мкВ*, по формуле:

$$Ф(z) = Ф\left(\frac{x - M}{\sigma}\right),$$

где x=Δφ≤5 *мкВ*

$$Ф\left(\frac{5 - 6{,}2}{2{,}13}\right) = Ф(-0{,}56),$$

Функция распределения от отрицательного параметра (-z) определяется выражением:

$$Ф(-z) = 1 - Ф(z),$$

Таким образом:

$$\text{P} = 1 - \Phi(z) = 1 - \Phi(0{,}56) = 1 - 0{,}7123 = 0{,}2877 \approx 29\%$$

Значение ***Ф(z)*** определяется по таблице: “Значения нормальной функции распределения” (см. приложения №3).

Ответ: *М=6,2 мкВ; Д=4,52(мкВ)^2; σ=2,13 мкВ*

Р= 0,2877≈29%

Задача №3. Измерения значений естественного фона ионизирующего излучения в импульсах/сек, полученные с помощью пересчетного прибора, дали следующие результаты:

15	19	20	20	21	23	24	16	27	40	30	31	32
35	25	26	30	30	20	28	26	23	18	12	10	

Удовлетворяет ли это распределение распределению Гаусса? Построить графики зависимости экспериментальной вероятности попадания значений в каждый из интервалов P_i и теоретической вероятности $P_{теор}$ от средних значений интервалов $\overline{x_i}$.

Решение: Из полученных результатов составляем вариационный ряд:

10	12	15	16	18	19	20	20	20	21	23	23	24
25	26	26	27	28	30	30	30	31	32	35	40	

Все варианты выборки делят в зависимости от числа вариант на нечетное число интервалов, начиная с трех (k=3, 5, 7, 9, 11, …).

Разобъём вариационный ряд на 5 интервалов. Находим шаг интервала Δx :

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{5},$$

где $x_{\max}$ -максимальное значение варианты в интервале,

$x_{\min}$ -минимальное значение варианты в интервале.

Тогда $\Delta x = \frac{40-10}{5} = 6\left(\frac{имп}{сек}\right)$

Верхние границы каждого из интервалов определяется по формуле:

$$x^*_{\max} = x_{\min} + i\Delta x,$$

где $\boldsymbol{i}$=1, 2, 3, 4, 5, ($\boldsymbol{i}$-номер интервала)

Нижняя граница каждого последующего интервала $x^*_{\min}$ определяется значением верхней границы предыдущего.

Вероятность попадания варианты в данный интервал P_i (экспериментальная вероятность) определяется по формуле:

$$P_i = \frac{m_i}{n},$$

где m_i -число вариант в каждом из интервалов, определяемых по вариационному ряду, исходя из значений нижней и верхней границы интервала.

n_i -обьем выборки, в нашей задаче равный 25.

Среднее значение интервала определяем по формуле:

$$\overline{x_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{m_i},$$

где $\sum_{i=1}^{m_i} x_i$ -сумма значений вариант в интервале.

Математическое ожидания M определяем по формуле:

$$M = \sum_{i=1}^{k} P_i \overline{x_i},$$

Дисперсию $Д$ определяется по формуле:

$$Д = \sum_{i=1}^{k} \left(\overline{x_i} - M\right)^2 P_i,$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{Д}$.

Учитывая все вышеуказанное, заполняем таблицу №1.

Таблица 1.

№ интервала	$x^*_{\min}$ *(имп/сек)*	$x^*_{\max}$ *(имп/сек)*	m_i	P_i	$\overline{x_i}$ *(имп/сек)*	$P_i \overline{x_i}$ *(имп/сек)*	$\left(\overline{x_i} - M\right)^2 P_i$ *(имп/сек)*^{2}
1	10	16	4	0,16	13,25	2,12	18,63
2	16	22	6	0,24	19,67	4,72	4,58
3	22	28	8	0,32	25,25	8,08	0,47
4	28	34	5	0,20	30,60	6,12	8,61
5	34	40	2	0,08	37,50	3,00	14,49
			25	$\sum_{i=1}^{k} P_i = 1$		M=24,04	$Д$=46,78

Примечание. Количество вариант первого интервала m_i определяем, исходя из того, что нижней границией является 10 имп/сек, а верхней – 16 имп/сек, т.е. в первый интервал из вариационного ряда вошли варианты:

10; 12; 15; 16 ($m_1 = 4$), среднее значение этого интервала:

$$\overline{x_1} = \frac{10+12+15+16}{4} = 13{,}25\left(\frac{имп}{сек}\right).$$

Во второй интервал вошли варианты: 18; 19; 20; 20; 20; 21. Таким образом, $m_2=6$, тогда

$$\overline{x_2} = \frac{18+19+20+20+20+21}{6} = 19{,}67\left(\frac{имп}{сек}\right) \text{ и т.д.}$$

Среднее квадратическое отклонение σ равно:

$$\sigma = \sqrt{Д} = \sqrt{46{,}78} = 6{,}84\left(\frac{имп}{сек}\right).$$

Для определения теоретической вероятности попадания варианты в данный интервал находим значения функции распределения Ф(z_2) и Ф(z_1), где $Z_2 = \dfrac{x^*_{\max} - M}{\sigma}$,

($x^*_{\max}$ -верхняя граница соответствующего интервала)

$Z_1 = \dfrac{x^*_{\min} - M}{\sigma}$, ($x^*_{\min}$ – нижная граница соответствующего интервала).

Если значения *z* отрицательное, то *Ф(-z)=1-Ф(z)*

Значение теоретической вероятности попадания варианты в интервал $P_{теор}$ определяем по формуле:

$$P_{теор}=Ф(z_2)-Ф(z_1).$$

Величина функции распределения Ф(z) определяется по таблице (см. приложение №3).

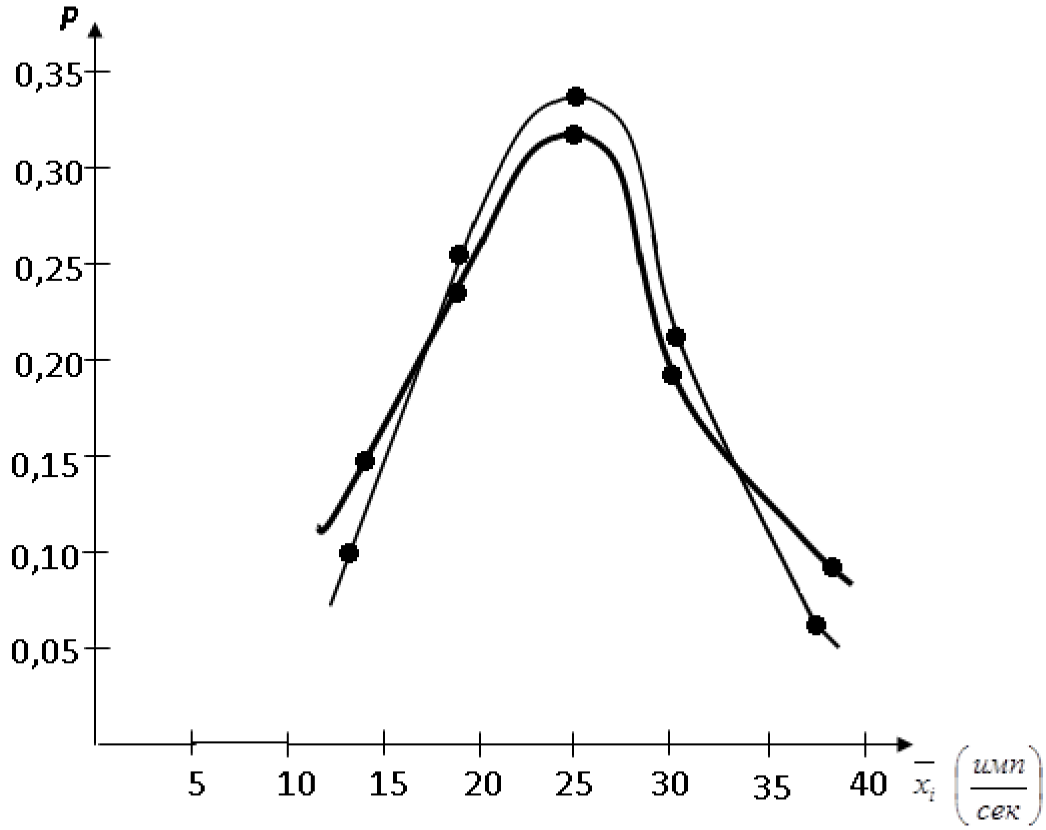
Полученные значения z_2, Ф(z_2), z_1, Ф(z_1) и $P_{теор}$=Ф(z_2)-Ф(z_1) заносим в таблицу №2.

Таблица №2

№ интервала	$Z_2 = \dfrac{x^*_{\max} - M}{\sigma}$	*Ф(z₂)*	$Z_1 = \dfrac{x^*_{\min} - M}{\sigma}$	*Ф(z₁)*	$P_{теор}=Ф(z_2)-Ф(z_1)$
1	-1,18	0,1190	-2,05	0,0179	0,10
2	-0,30	0,3821	-1,18	0,1190	0,26
3	0,58	0,7190	-0,30	0,3821	0,34
4	1,46	0,9279	0,58	0,7190	0,21
5	2,33	0,9893	1,46	0,9279	0,06

Сравнивая величины для каждого из пяти интервалов экспериментальной вероятности *Pi* (см. таблицу №1) и теоретической вероятности попадания варианты в заданный интервал $P_{теор}$ (см. таблицу №2), можно сделать вывод, что их значения очень близки друг к другу, следовательно, полученные значения естественного фона подчиняются распределению Гаусса.

Строим графики зависимости экспериментальных вероятностей *Pi* и теоретических вероятностей $P_{теор}$ от средних значений интервалов $\overline{x_i}$.



экспериментальная кривая

теоретическая кривая.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Задачи для домашнего решения

Задача №1. О влиянии фармакологического препарата судили по изменению веса лабораторных животных, которым в течение недели вводили препарат. За неделю изменения веса составили:

Изменения веса, гр.	-100	-50	0	50	100
Вероятность	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение изменения веса.

Задача №2. Проведены точные измерения дозированного медицинского препарата, предназначенного для инъекций и содержащегося в ампулах по 1 мл в каждой ампуле. При проверке 12 ампул получили следующие результаты (в мл): 0,97| 1,07| 1,02| 1,04| 0,97| 0,96| 1,03| 1,05| 0,96| 0,97| 1,05| 1,01|. Считая, что распределение подчиняется нормальному закону, определить вероятность того, что в ампуле меньше одного миллилитра раствора.

Задача №3. Анализ веса 100 новорожденных показал, что у них в интервал от 1,75 до 2,25 (со средним весом 2 кг) попало 5 новорожденных; со средним весом 2,5 кг – 25; со средним весам 3 кг – 40; 3,5 кг – 25; 4 кг -5 новорожденных. Совпадает ли это распределение с нормальным законом. Определить вероятность рождения недоношенного ребенка (m≤2,4кг).

Задачи для решения на практическом занятии

Задача №1. Исследования показали, что здоровые люди в значительной мере отличаются по содержанию в крови фермента каталазы. В таблице приведены данные обследования 1000 людей.

Содержания фермента, x_i	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5
Число людей m_i	40	100	200	300	200	120	40

Определить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и вероятность, что содержание каталазы в крови меньше или равно 5,0.

Задача №2. У 300 крабов одного и того же вида были измеряны с точностью до 0,1мм длины дактилоподитов. Определить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и вероятность, что длина дактилоподитов будет меньше или равна 8 мм.

Длина, мм, x_i	4,2	5,1	6,3	7,4	8,2	9,5	10,6	11,1
Число крабов m_i	3	24	45	72	75	54	18	9

Задача №3 Случайная величина (x) имеет следующий закон распределения:

x_i	5	10	15	20	25	30	35
P_i	0,05	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,05

Определить вероятность того, что случайная величина примет значение: x≤25.

ТЕМА №9
ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Методы математической статистики позволяют систематизировать и оценивать экспериментальные данные, которые рассматриваются как случайные величины.

Методы математической статистики нашли широкое применение при обработке данных медико-биолоических исследований. В биологических и медицинских исследованиях приходится иметь дело с очень сложными опытами, в которых многие факторы не поддаются строгому учету и контролю. Для определения значения конкретного параметра, свойственного организму в том или ином состоянии, необходим анализ достаточно большого числа случаев (тысяч) обследования соответствующих пациентов. Однако математическая статистика позволяет даже при небольшом числе пациентов составить конечную выборку значений функционального параметра и приближенно рассчитать её основные характеристики: среднюю конечных выборок, среднее квадратическое отклонение, а также определить доверительные границы генеральной средней.

Цель занятия:

1. Научться строить гистограммы и полигоны для случайных величин.
2. Находить границы доверительного интервала для оценки математического ожидания нормального распределения

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. *ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ СТАТИСТИКУ. ГЕНЕРАЛЬНАЯ И ВЫБОРОЧНАЯ СОВОКУПНОСТЬ*

Математическая статистика – наука о математических методах систематизации и использования статистических данных для решения научных и прикладных задач.

Математическая статистика тесно примыкает к теории вероятностей и базируется на её понятиях. Однако главным в математической статистике является не распределение случайных величин, а анализ статистических данных и выяснение, какому распределению они соответствуют.

Наиболее общая совокупность, состоящая из всех объектов, которые могут быть к ней отнесены называется **генеральной совокупностью**. Её изучение трудно, поэтому вводится понятие **выборочной совокупности** или просто **выборки**. Множество объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности, называется **выборкой**.

Свойства объектов выборки должно соответствовать свойствам генеральной совокупности, т.е. выборка должна быть репрезентативной (или представительной). При этом выборка должна осуществляться случайно. Например, изучается состояние здоровья населения большого города. При этом нельзя воспользоваться выборкой населения одного района города, так как условия проживания в разных районах могут отличаться и таким образом влиять на состояние здоровья. Поэтому выборка должна представлять случайно отобранные объекты всего города.

2. СТАТИСТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫБОРКИ

Если записать в последовательности измерений все значения величины x в выборке, то получим **простой статистический ряд**. Такой ряд неудобен для анализа, так как в нем нет последовательности возрастания (или убывания) значений, встречаются и повторяющиеся величины.

Пусть n – это объем выборки.

Признак x_1 появился m_1 раз

x_2 появился m_2 раз

……………………

x_k появился m_k раз

Значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_k$ – это **варианты**.

Последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке называется **вариационным (или ранжированным) рядом.**

$m_1, m_2, \ldots, m_k$ – это частоты появления признака

$\frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n}, \ldots, \frac{m_k}{n}$ - это относительные частоты появления признака или вероятности:

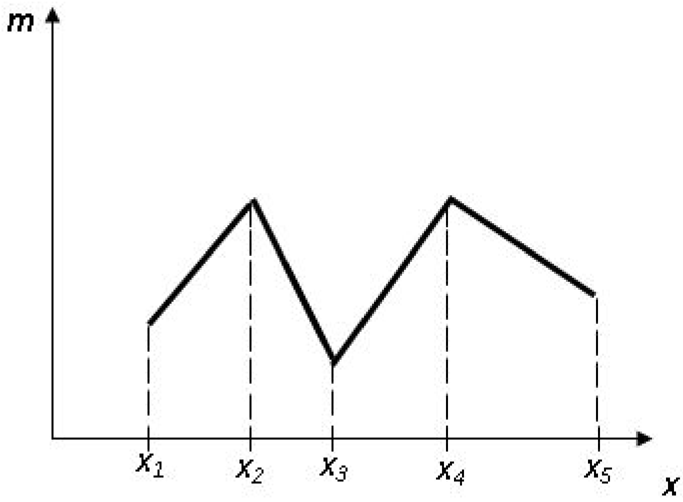
$$P_1 = \frac{m_1}{n}; \quad P_2 = \frac{m_2}{n}; \quad \ldots, P_k = \frac{m_k}{n};$$

Причем: $\sum_{i=1}^{k} P_i = 1$

Дискретный вариационный ряд представляют в виде таблицы, которая называется **статистическим дискретным рядом распределения.**

x	x_1	x_2	…	x_i	…	x_k
m	m_1	m_2	…	m_i	…	m_k
P^*	P_1^*	P_2^*	…	P_i^*	…	P_k^*

В этом случае строится **полигон**: по оси абсцисс откладывают значения вариант x_i а по оси ординат – значения частот m_i (или относительных частот P_i^*). Строится ломанная, которая называется полигоном частот (или относительных частот):

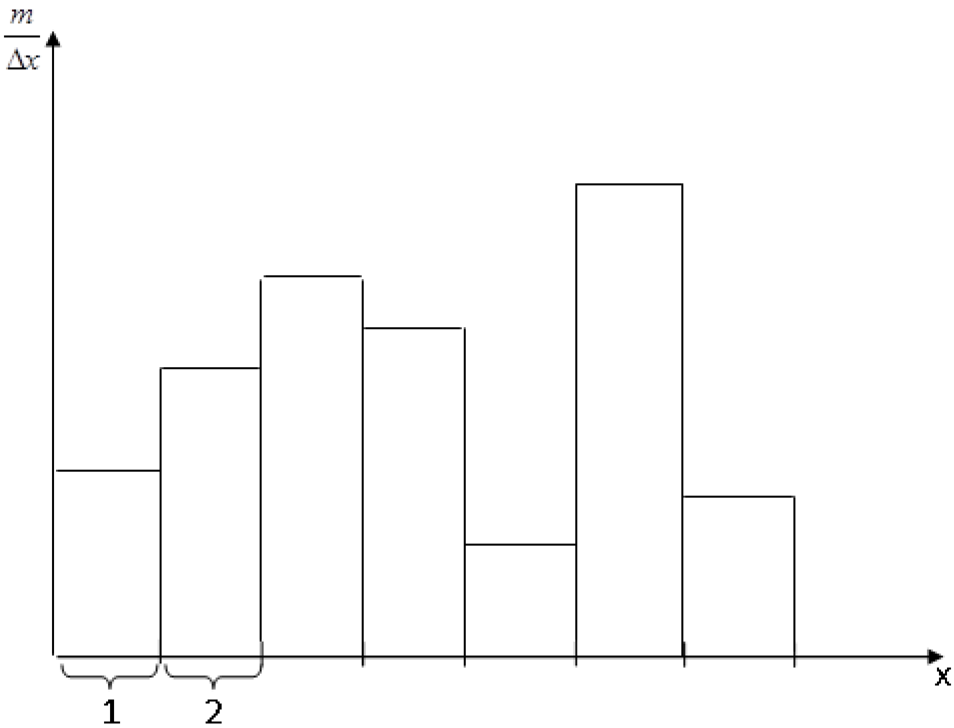


полигон частот

Непрерывный вариационный ряд представляют в виде таблицы, которая называется **статистическим интервальным рядом распределения**.

Интервал	x_0- x_1	x_1- x_2	…	x_{i-1} -x_i	…	x_{k-1}- x_k
m	m_1	m_2	…	m_i	…	m_k
P^*	P_1^*	P_2^*	…	P_i^*	…	P_k^*

В этом случае строится **гистограмма.** По оси абсцисс откладываются интервалы длиной ***Δx*** (***Δx*** – шаг интервала, определяется разностью между максимальным и минимальным значением интервала) и на каждом интервале строят прямоугольник с основанием ***Δx*** и высотой $\frac{m_i}{\Delta x}$ (или $\frac{P_i^*}{\Delta x}$).



Частоту (или относительную частоту), приходящуюся на единицу интервала называют **плотностью частоты** (или относительной частоты).

При увеличении числа наблюдений и уменьшении длины *(Δx)* интервалов верхняя ступенчатая линия гистограммы будет стремиться к плавной кривой и в пределе эта кривая будет графиком плотности вероятности.

3. СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ВЕЛИЧИН И СПОСОБЫ ИХ ОПРЕДЕЛНИЯ

При обработке результатов экспериментальных наблюдений большое значение имеют средние величины.

1. Выборочная средняя арифметическая величина

Средняя величина, вычисленная на основании ряда чисел, каждое из которых встречается один раз, называется **простой** средней арифметической:

$$\overline{x_B} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Если значение признака x_1 появилось m_1 раз

x_2 появилось m_2 раз

....

x_k появилось m_k раз

причем $m_1+m_2+\ldots+m_k=n$, то вычисляется взвешенная средняя арифметическая:

$$\overline{x_B} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i m_i}{n}$$

Если при обработке экспериментальных данных составляется интервальный вариационный ряд, то n наблюдавшихся значений величины $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ группируются в N интервалов с одинаковой длиной интервала Δx. Среднее значение интервала обозначили $\overline{x_i}$, где $i=1,2,3,\ldots,N$. Число значений, попавших в интервал обозначается через m_i, тогда:

$$\overline{x_B} = \frac{\overline{x}_1 m_1 + \overline{x}_2 m_2 + \ldots + \overline{x}_N m_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \overline{x}_i m_i}{n}$$

При увеличении объема выборки (n) выборочная средняя стремится к генеральной средней, а это означает, что выборочная средняя есть **состоятельная оценка генеральной средней.**

2. ***Модой (Мо)*** называется наиболее вероятное значение случайной величины или значение величины с наибольшей частотой появления.

3. ***Медианой (Ме)*** называется значение варианты, стоящей в центре вариационного ряда, т.е. эта варианта делит вариационный ряд на две равные по числу значений части при условии, что объем выборки есть нечетное число. Если объем выборки четной число то медиана определяется полусуммой двух вариант, стоящих в центре вариационного ряда.

Например:

x	3,4	3,9	4,4	4,9	5,4	5,9	6,4	***n***=7

***Ме*=4,9**

x	3,4	3,9	4,4	4,9	5,4	5,9	6,4	6,9	***n***=8

$$\text{Me} = \frac{4{,}9 + 5{,}4}{2} = 5{,}15$$

4. *ВЫБОРОЧНАЯ ДИСПЕРСИЯ И ВЫБОРОЧНОЕ СРЕДНЕЕ КВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ*

Выборочной дисперсией $Д_В$ называют среднее арифметическое квадратов отклонения вариант от их среднего значения.

Если все варианты выборки объема n имеют различные значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то

$$Д_В = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x_В}\right)^2}{n} \qquad (1)$$

Если значение варианты (признака)

x_1 появляется m_1 раз

x_2 появляется m_2 раз

....

x_k появляется m_k раз,

причем $m_1 + m_2 + ... + m_k = n$, то

$$Д_В = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i\left(x_i - \overline{x_В}\right)^2}{n} \qquad (2)$$

Выборочным средним квадратическим отклонением или **стандартом отклонения** называется квадратный корень из выборочной дисперсии:

$$\sigma_В = \sqrt{Д_В}$$

Дисперсию генеральной совокупности нельзя оценить по значениям выборочной дисперсии (это положение можно доказать) поэтому вводится понятие **«исправленная дисперсия»**, которая определяется по формуле:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} Д_В$$

Для формулы (1): $$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x_В}\right)^2}{n-1}$$

Для формулы (2): $$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i\left(x_i - \overline{x_В}\right)^2}{n-1}$$

Тогда исправленное среднее квадратическое отклонение $S = \sqrt{S^2}$

5. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ И УРОВНИ ЗНАЧИМОСТИ. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ И ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ГРАНИЦЫ

Точечная оценка, особенно при малой выборке, может значительно отличаться от истинных параметров генеральной совокупности. Поэтому при небольшом объеме выборки пользуются **интервальными оценками**.

В этом случае указывается интервал (доверительный интервал или доверительные границы), в котором с определенной **(доверительной)** вероятностью P находится истинное значение исследуемой величины (например, среднее значение генеральной совокупности).

Доверительная вероятность P определяет вероятность, с которой осуществляется неравенство:

$$\bar{x}_в - \varepsilon \le \mu \le \bar{x}_в + \varepsilon \qquad (*)$$

где ε –положительное число, характеризующее точность оценки.

Кроме доверительной вероятности используют «противоположенное» понятие – **уровень значимости *β*:**

$$\beta = 1 - P$$

Он выражает вероятность непопадания истинного значения исследуемой величины в доверительный интервал.

Наиболее часто в медицине доверительная вероятность P принимается равной: 0,95; 0,99 и 0,999.

Если генеральная совокупность распределена по нормальному закону, тогда в неравенстве (*):

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\tau$$

Для нахождения τ используются специальные таблицы *Ф*-функции.

Тогда доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения определится неравенством:

$$\bar{x}_в - \tau\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x}_в + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\tau$$

6. ИНТЕРВАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ПРИ МАЛОЙ ВЫБОРКЕ

При достаточно большом объеме выборки можно сделать вполне надёжные заключения о параметрах генеральной совокупности. Однако на практике часто имеют дело с выборками небольшого объема *(n<30).* Кроме того, почти всегда оказывается неизвестной генеральная дисперсия.

Имея выборку, можно найти лишь исправленную выборочную дисперсию S^2 и выборочную среднюю $\overline{x_B}$. Выразим отклонение выборочного среднего от генерального через S и некоторый параметр t.

$$\overline{x_B} - \mu = \pm t \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \quad \text{или} \quad \mu = \overline{x_B} \pm t \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Или представим это в виде интервала:

$$\overline{x_B} - t \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x_B} + t \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

где t- коэффициент Стьюдента, который находится по таблицам, согласно заданному объему выборки и доверительной вероятности (приложение 4).

Эталоны решения типовых задач

Задача 1. Содержание свободного гепарина крови принимало следующие значения x_i с частотой появления m_i.

x_i (мг,%)	5,7	5,9	6,3	5,6	4,1	4,0	4,5	5,0	5,1	6,7
m_i	5	11	2	7	4	15	13	23	9	1

Вычислить выборочную среднюю арифметическую, медиану и моду. Построить полигон частот.

Решение:

Выборочная средняя определяется по формуле:

$$\overline{x_B} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_1 m_1}{n},$$

где $\sum_{i=1}^{n} x_i m_i$ -сумма произведений значений выборки x_i на соответствующую частоту их появлений m_i,

n-объем выборки, определяемой через $\sum_{i=1}^{n} m_i$

$$\overline{x_B} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + x_4 m_4 + x_5 m_5 + x_6 m_6 + x_7 m_7 + x_8 m_8 + x_9 m_9 + x_{10} m_{10}}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 + m_8 + m_9 + m_{10}} =$$

$$= \frac{5{,}7 \cdot 5 + 5{,}9 \cdot 11 + 6{,}3 \cdot 2 + 5{,}6 \cdot 7 + 4{,}1 \cdot 4 + 4{,}0 \cdot 15 + 4{,}5 \cdot 13 + 5{,}0 \cdot 23 + 5{,}1 \cdot 9 + 6{,}7 \cdot 1}{5 + 11 + 2 + 7 + 4 + 15 + 13 + 23 + 9 + 1} =$$

$$= \frac{28{,}5 + 64{,}9 + 12{,}6 + 39{,}2 + 16{,}4 + 60 + 58{,}5 + 115 + 45{,}9 + 6{,}7}{90} = \frac{447{,}7}{90} = 4{,}974 \approx 4{,}97 \text{ (мг,\%)}$$

Для определения медианы по заданным параметрам x_i строим вариационный ряд:

x_i	4,0	4,1	4,5	5,0	5,1	5,6	5,7	5,9	6,3	6,7

m_i	15	4	13	23	9	7	5	11	2	1

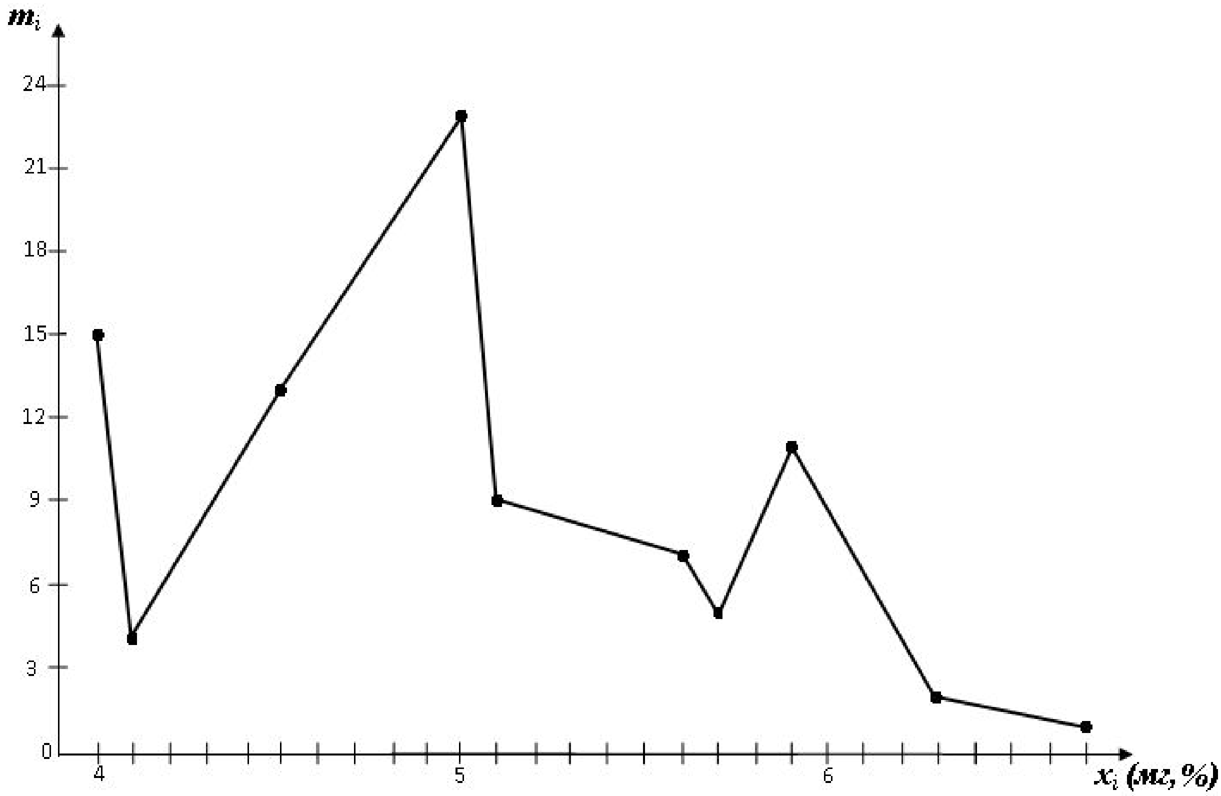
При четном числе вариант медиана определится как среднее арифметическое из двух центральных вариант

$$Me = \frac{5{,}1 + 5{,}6}{2} = 5{,}35 \ (\text{мг},\%)$$

Мода:

$$M_0 = 5{,}0 \ (\text{мг},\%)$$

Используя данные таблицы, строим полигон частот:



Ответ: $\overline{x_B}$ *=4,97 мг,%   Me=5,0 (мг,%) M_0=5,0 (мг,%)*

Задача 2. Измерения роста девочек в возрасте от трех до 5 лет представлены в виде статистического интервального ряда распределения:

Рост в см (x_i)	92-95	95-98	98-101	101-104	104-107	107-110	110-113
Количество девочек m_i	5	17	23	31	45	19	20

Вычислить выборочную среднюю арифметическую. Построить гистограмму.

Решение:

Выборочную среднюю арифметческую находим по формуле:

$$\overline{x_B} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} m_i}{n} = \frac{\overline{x_1} \cdot m_1 + \overline{x_2} \cdot m_2 + \overline{x_3} \cdot m_3 + \overline{x_4} \cdot m_4 + \overline{x_5} \cdot m_5 + \overline{x_6} \cdot m_6 + \overline{x_7} \cdot m_7}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7},$$

где $\overline{x_1} = \frac{92+95}{2} = 93{,}5\,(\text{см})$

$$\overline{x_2} = \frac{95+98}{2} = 96{,}5\ (\text{см})$$

$$\overline{x_3} = \frac{98+101}{2} = 99{,}5\ (\text{см})$$

$$\overline{x_4} = \frac{101+104}{2} = 102{,}5\ (\text{см})$$

$$\overline{x_5} = \frac{104+107}{2} = 105{,}5\ (\text{см})$$

$$\overline{x_6} = \frac{107+110}{2} = 108{,}5\ (\text{см})$$

$$\overline{x_7} = \frac{110+113}{2} = 111{,}5\ (\text{см})$$

Вычисляем $\overline{x_B}$:

$$\overline{x_B} = \frac{93{,}5 \cdot 5 + 96{,}5 \cdot 17 + 99{,}5 \cdot 23 + 102{,}5 \cdot 31 + 105{,}5 \cdot 45 + 108{,}5 \cdot 19 + 11{,}5 \cdot 20}{5+17+23+31+45+19+20} =$$

$$= \frac{467{,}5 + 1640{,}5 + 2288{,}5 + 3177{,}5 + 4747{,}5 + 2061{,}5 + 2230}{160} = \frac{16613}{160} = 103{,}8\ (\text{см})$$

Для построение гистограммы определяем шаг (ширину) интервала:

Δx=95-92=3 (см)

Определяем отношения $\frac{m_i}{\Delta x}$;

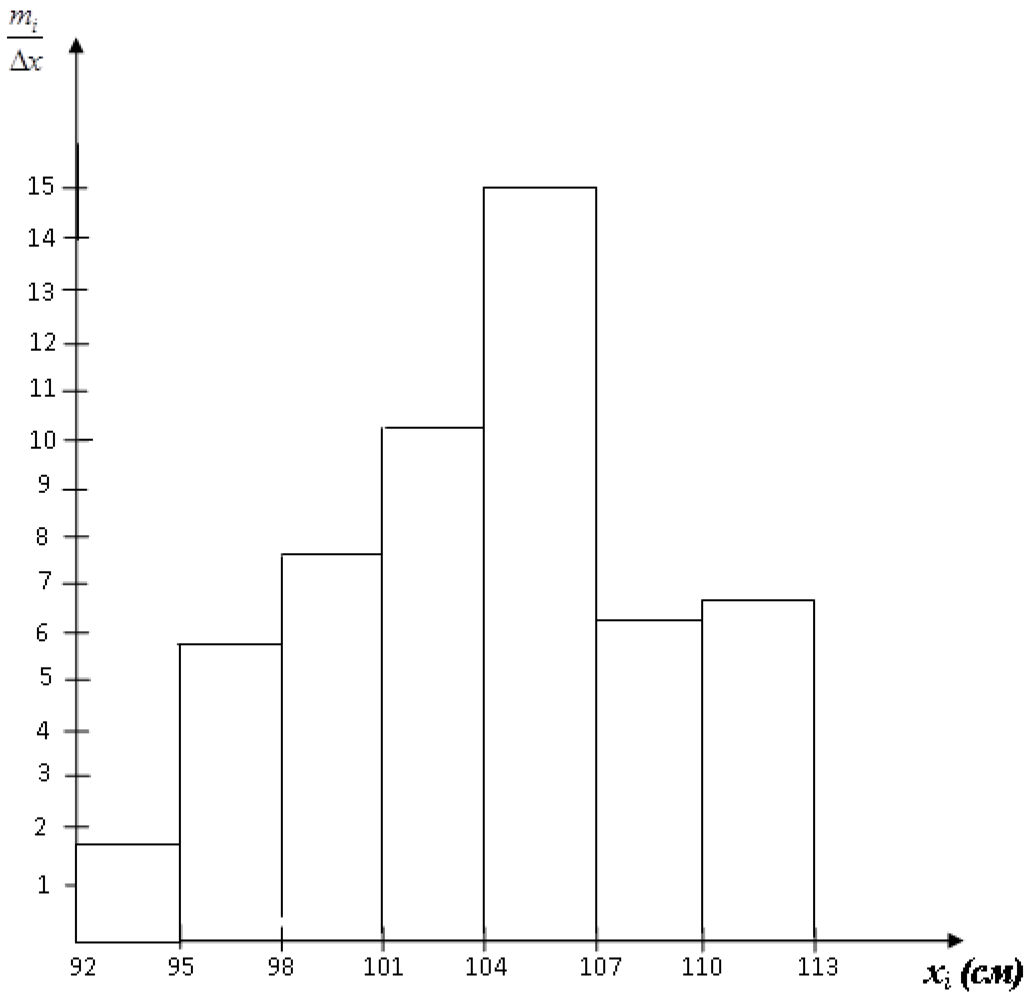
$$\frac{m_1}{\Delta x} = \frac{5см}{3см} \approx 1{,}7 \qquad m_5 = \frac{45см}{3см} = 15{,}0$$

$$\frac{m_2}{\Delta x} = \frac{17см}{3см} \approx 5{,}7 \qquad m_6 = \frac{19см}{3см} = 6{,}3$$

$$\frac{m_3}{\Delta x} = \frac{23см}{3см} \approx 7{,}7 \qquad m_7 = \frac{20см}{3см} = 6{,}7$$

$$\frac{m_4}{\Delta x} = \frac{31см}{3см} \approx 10{,}3$$

Строим гистограмму:



Ответ: $\overline{x_B}$ =103,8см.

Задача 3. Измерение веса девочек x_i в возрасте 10 лет дало следующие результат:

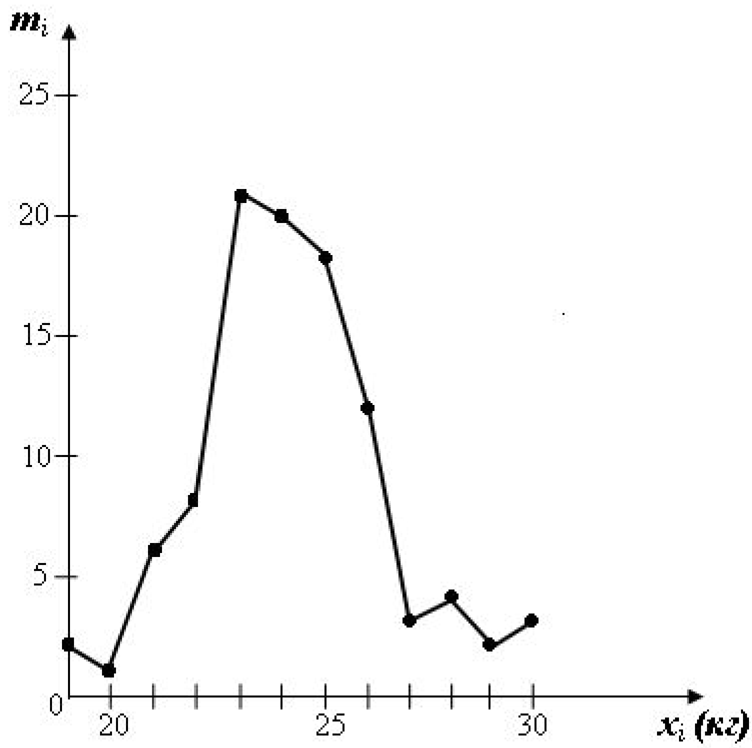
x_i *(кг)*	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
m_i	2	1	6	8	21	20	18	12	3	4	2	3

$$n = \sum m_i = 100$$

Построить полигон частот. Вычислить выборочную среднюю арифметическую, медиану и моду.

Решение

Построим полигон частот:



Выборочная средняя арифметическая будет:

$$\overline{x_B} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + ... + x_{12} m_{12}}{m_1 + m_2 + ... + m_{12}} = 24{,}26\,кг$$

Медиана: ***Ме***=24,5 кг

Мода: ***Мо***=23 кг

Задача 4. Измерения роста мужчин представлены статистическим интервальным рядом распределения:

x_i *(см)*	150-154	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182	182-186
m_i	1	3	11	23	25	22	11	3	1

Построить гистограмму. Вычислить выборочное среднее арифметическое, медиану и моду.

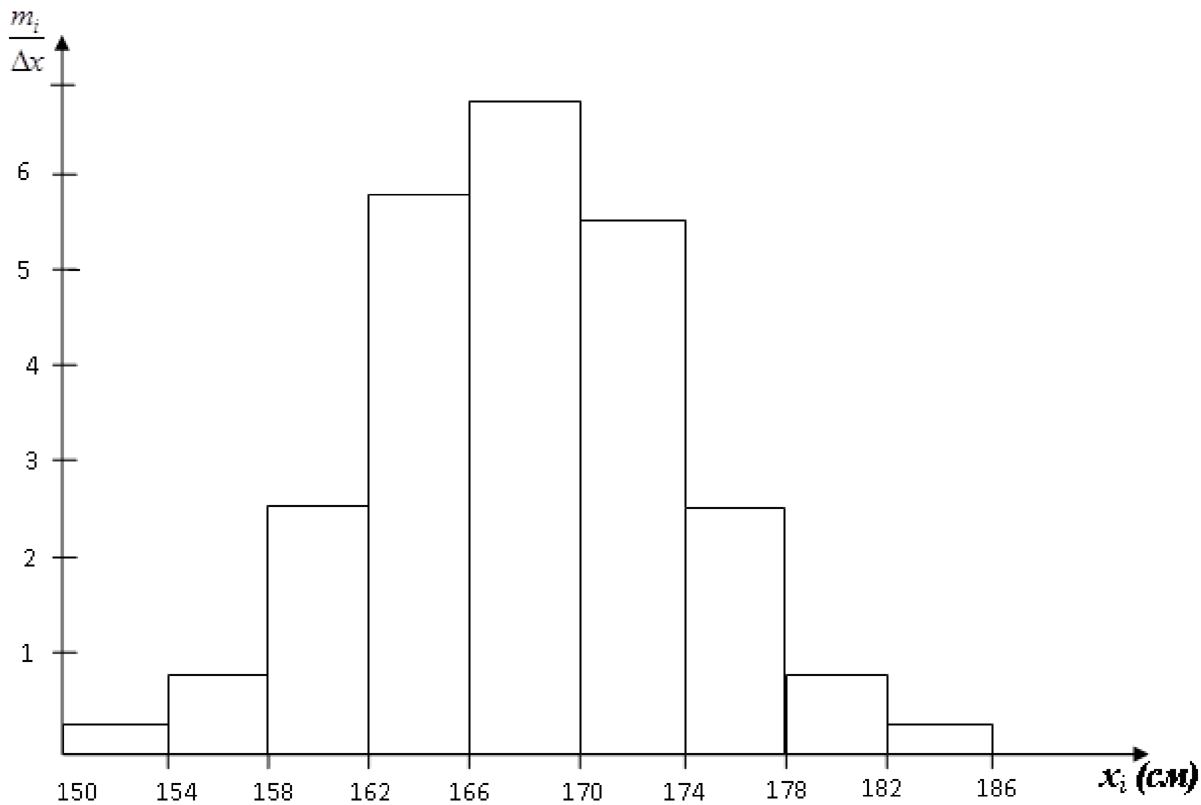
Решение

Находим шаг интервала Δx:

$$\Delta x = 154 - 150 = 4 \text{ (см)}$$

Заполняем таблицу:

x_i *(см)*	150-154	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182	182-186
m_i	1	3	11	23	25	22	11	3	1
$\bar{x}_i$ (см)	154	156	160	164	168	172	176	180	184
$\bar{x}_i m_i$ (см)	152	468	1760	3772	4200	3784	1936	540	184
$m_i/\Delta x$	0,25	0,75	2,75	5,75	6,25	5,5	2,75	0,75	0,25



Медиана: $\mathrm{Me} = \frac{X_{50}+X_{51}}{2} = \frac{168+168}{2} = 168$ см

Мода: ***Мо*** *=168см*

Задача 5. Найти исправленную дисперсию S^2, стандарт отклонения S для показателя гемоглобина, значения которого приведены ниже.

Показатель гемоглобина x_i	73	72	71	70	69	68	67	66	65	
Число лиц m_i	2	4	6	10	11	7	5	4	1	n=50

Решение

Составим дополнительную таблицу:

$x_i\, m_i$	146	288	426	700	759	476	335	264	65	$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot m_i = 3459$
$(x_i - \overline{x_B})^2$	14,59	7,95	3,3	0,67	0,32	1,39	4,75	10,11	17,47	
$m_i(x_i - \overline{x_B})^2$	29,18	31,8	19,8	6,72	3,56	9,74	23,73	40,44	17,47	$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - \overline{x_в})^2 = 182{,}54$

Находим выборочное среднее арифметическое по формуле:

$$\overline{x_B} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i m_i}{n} = 69{,}18$$

Находим исправленную дисперсию по формуле:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i (x_i - \overline{x_B})^2}{n-1} = \frac{182{,}54}{50-1} = 3{,}73$$

Стандарт отклонения

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{3{,}73} = 1{,}93$$

Задача 6. Найти исправленную дисперсию S^2 стандарт отклонения S для веса щитовидной железы, значения которого даны в таблице:

x_i *(Г)*	60	68	70	72	90	100	105	120	125	130
m_i	2	2	6	5	7	8	7	2	3	4

Решение

Для удобства решения задачи заполним таблицу:

Заполним таблицу:

x_i (г)	60	68	70	72	90	100	105	120	125	130
m_i	2	2	6	5	7	8	7	2	3	4
$x_i\, m_i$ *(Г)*	120	136	420	360	630	800	735	240	375	520
$(x_i - \overline{x_B})^2$ $(Г^2)$	1156	676	576	484	16	36	121	676	961	1296
$m_i(x_i - \overline{x_B})^2$ $(Г^2)$	2312	1352	3456	2420	112	288	847	1352	2883	5184

Рассчитаем суммы:

$$n = \sum_{i=1}^{n} m_i = 46$$

$$\overline{x_B} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i m_i}{n} = 94 \quad (\text{г})$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i - \overline{x_B}\right)^2 = 20206 \quad (\text{г}^2)$$

Исправленную дисперсию определяем по формуле:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i - \overline{x_B}\right)^2}{n-1} \ ,$$

где m_i-частота появления варианты

x_i-значение варианты

$\overline{x_B}$ -сренее выборочное арифметическое

n-объем выборки.

Используя данные таблицы, находим:

$$S^2 = \frac{202006}{46-14} = \frac{20206}{45} \approx 449\,(\text{г}^2)$$

Стандарт отклонения (исправленное среднее квадратическое отклонение) находим по формуле:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{449} \approx 21{,}2\,(\text{г})$$

Ответ: $S^2 \approx 449\,\text{г}^2$, $S \approx 21{,}2$г

Задача 7. Пять измерений относительной вязкости крови человека дали следующие результаты: 4,80; 4,70; 4,85; 4,75; 4,90 ($\cdot 10^{-3}$ Па·с).

Найти среднее арифметическое и величину доверительного интервала при доверительной вероятности 0,95.

Решение:

1. *Определим среднее арифметическое*

$$\overline{x_B} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = \frac{\left(4{,}80 + 7{,}40 + 4{,}85 + 4{,}75 + 4{,}90\right) \cdot 10^{-3}\, Па \cdot c}{5} = 4{,}80 \cdot 10^{-3}\, Па \cdot c$$

$$\overline{x_B} = 4{,}80 \cdot 10^{-3}\, Па \cdot c$$

Определим стандарт отклонения среднего арифметического:

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x_B}\right)^2}{n-1}}$$

для этого составим таблицу:

x_i	4,80	4,70	4,85	4,75	4,90	
$x_i-\overline{x_B}$	0	-0,1	0,05	-0,05	0,1	
$\left(x_i-\overline{x_B}\right)^2$	0	0,01	0,0025	0,0025	0,01	$\sum_{i=1}^{k}\left(x_i-\overline{x_B}\right)^2=0{,}025$

$$S=\sqrt{\frac{0{,}025}{4}}=0{,}079$$

2. Определим доверительной интервал при доверительной вероятности ***P=0,95.*** По таблице для *P=0,95* находим коэффициент Стьюдента *t=2,13.*

Зная, что доверительной интервал определяется в виде интервала:

$$\overline{x_B}-t\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\le\mu\le\overline{x_B}+t\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$\left(4{,}8\cdot10^{-3}-2{,}13\frac{0{,}079}{\sqrt{5}}\right)Па\cdot c\le\mu\ge\left(4{,}8\cdot10^{-3}+2{,}13\frac{0{,}079}{\sqrt{5}}\right)Па\cdot c$$

Таким образом, истинное значения относительной вязкости крови человека с вероятностью 95% лежат в интервале от $4{,}362\cdot10^{-3}$ Па·с до $4{,}968\cdot10^{-3}$ Па·с.

Задача 8. Двадцать одно измерение максимального кровяного давления у одного больного за период болезни дали следующие результаты (см. таблицу). Найти среднее арифметическое и величину доверительного интервала при доверительной вероятности ***0,99***.

x_i (мм.рт.ст.)	98	160	136	128	130	114	123	134	128	128	107	123	125	129	132	154	115	126	132	136	130	
$\left(x_i - \overline{x_B}\right)^2$	900	1024	64	0	4	196	25	36	0	0	441	25	9	1	16	676	169	4	16	64	4	$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x_B}\right)^2 = 3674$

$$\overline{x}_в = \frac{2688}{21} = 128$$

$$S = \sqrt{\frac{3674}{20}} = 13{,}55$$

Для ***P=0,99*** согласно таблицы коэффициента Стьюдента ***t=2,53***.

t·S=2,53·13,55=34,28

тогда

93,72<***μ***<162,28

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Задачи для домашнего решения

Задача 1. Значения вязкости крови принимали следующие значения:

Вязкость крови x_i (Па·с·10^{-3})	4,2	3,8	5,0	5,3	6,1	4,0	4,5	5,2	5,8	3,5
Количество пациентов m_i	18	12	21	9	2	28	31	8	7	4

Вычислить выборочную среднюю арифметическую, медиану и моду. Построить полигон частот.

Задача 2. Показания веса детей в возрасте полутора лет представлены в таблице

Вес детей, x_i (кг)	8,5-9,0	9,0-9,5	9,5-10,0	10,0-10,5	10,5-11	11-11,5	11,5-12	12-12,5
Количество детей m_i	77	23	16	13	21	51	9	10

Вычислить выборочную среднюю арифметическую, медиану и моду. Построить гистограмму.

Задача 3. Найти исправленную дисперсию S^2 и стандарт отклонения S для общего белка крови, данные которого представлены в таблице:

Общий белок крови, x_i (г,%)	6,81	5,90	7,04	6,72	6,54	6,89	5,54
Количество пациентов m_i	14	8	7	21	15	10	5

Задача 4. Найти исправленную дисперсию S^2 стандарт отклонения S для:

1. Общего белка крови

x_i	7,3	7,2	7,1	7,0	6,9	6,8	6,7	6,6	6,5	6,4
m_i	1	2	3	4	5	4	3	2	1	1

2. Свободного гепарина крови

x_i *(мг%)*	5,7	5,9	6,3	6,6	5,0	3,7	4,0	4,5	5,0	5,6
m_i	4	3	2	1	10	2	2	4	3	4

3. Веса щитовидной железы

x_i (г)	60	68	70	72	90	100	105	120	125	130
m_i	2	2	6	5	7	8	7	2	3	4

Задача 5. Значения скорости секреции альдестерона (мкг/сутки) при ожирении имели следующие величины:

370 274 337 326 281 349 403 350 315 358

Определить среднее арифметическое и величину доверительного интервала при доверительной вероятности P=0,95.

Задачи для решения на практическом занятии:

Задача 1. У обследуемых пациентов нижняя граница артериального давления оказалось равной:

Нижняя граница артериального давления x_i (мм.рт.ст)	67	80	110	74	85	100	90	105	78	64
Количество пациентов m_i	5	18	7	24	16	9	11	2	14	4

Вычислить выборочную среднюю арифметическую, медиану и моду.

Задача 2. Найти исправленную дисперсию S^2 стандарт отклонения S для объема циркулирующей крови:

Объем циркулирующей крови x_i (л)	4,3	5,1	4,8	5,5	4,7	6,0	5,3
Количество пациентов m_i	8	21	11	13	27	2	18

Задача 3. Содержание норадреналина в моче при грудной жабе имели следующие значения:

36,9 38,2 36,1 33,5 34,8 37,0 35,1 40,0 38,5 36,3

Определить среднее арифметическое и величину (границы) доверительного интервала при доверительной вероятности P=0,99.

Задача 4. У животных летальные дозы препарата *A* составляют

1,55; 1,58; 1,71; 1,44; 1,24; 1,89; 2,34.

Найти среднее арифметическое и величину доверительного интервала при доверительной вероятность ***0,95***.

Задача 5. Десять измерений общего белка крови *(г%)* при гепатите дали следующие результаты:

7,2; 6,92; 7,03; 7,52; 7,48; 7,1; 7,25; 7,18; 7,05; 7,00

Найти среднее арифметическое и величину доверительного интервала (при доверительной вероятность ***0,95***).

ТЕМА №10
ТЕОРИЯ КОРРЕЛЯЦИИ

Выявление связей (корреляций) между различными случайными параметрами и случайными процессами широко используется в медицинской диагностике. С помощью корреляционного анализа решаются задачи установления обоснованного диагноза. Целью диагноза является установление с высокой надежностью вида заболевания при определенных симптомах. Установление корреляций между различными показателями состояния больного и влиянием их изменений на жизнедеятельность организма является важной задачей лабораторных и клинических исследований.

Все системы, ткани, органы, клетки организма находятся в корреляционной связи друг с другом.

Определение коэффициента корреляции позволяется определить существование и степень связи между различными выборками.

***Цель занятия*:**

- Научиться определять величину коэффициента корреляции.
- Определять вид и степень связи между выборками по величине и знаку коэффициента корреляции.
- Научиться строить корреляционное поле и проводить линию регрессии.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ, СТАТИСТИЧЕСКАЯ И КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ЗАВИСИМОСТИ

Две случайные величины могут быть связаны функциональной зависимостью, быть независимыми, либо статистически зависимыми.

Если значению одной величины соответствует строго определенное значение другой величины, то зависимость между ними называется **функциональной**. Функционально связанные случайные величины x и y могут принимать различные значения, но если x приняла определенное значение, то y соответствует ему однозначно.

Статистической зависимостью величины y от величины x называется зависимость при которой каждому значению величины x из множества её возможных значений соответствует некоторое множество возможных значений величины y, характеризуемое определенным законом распределения.

Частным случаем статистической зависимости является **корреляционная (или стохастическая).** Понятие корреляции соответствует русскому термину «соотношение».

Основные регулирующие системы организма непрерывно осуществляют стабилизацию всех параметров. При возникновении патологии (или при изменении внешних воздействий) изменение значения одного параметра влечет за собой изменения в различной степени значений других параметров. В силу наличия обратных связей и множественности путей саморегуляции организма связь между его параметрами является случайной и может быть описана не функциональной зависимостью, а корреляционной связью. Выявление связей (корреляций) между различными случайными параметрами и случайными процессами широко используется в медицинской диагностике.

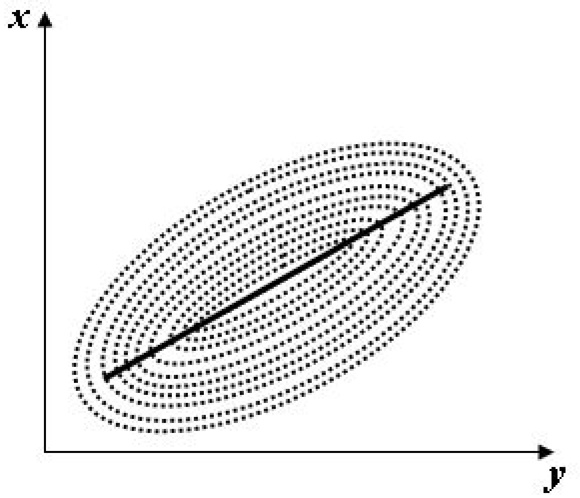
Благодаря различным формам корреляции (физико-химическим, нервным, морфофизиологическим, эволюционным и т.д.) организм проявляется как единая сложная целостная система.

Корреляция обозначает главным образом степень выраженности связи между вариационными рядами. Например, между массой тела человека и объемом циркулирующей крови, между основным обменом веществ и амплитудной артериального давления. Уже в 1637 г. Галилей обсуждал связь между размерами скелета и массой организма.

2. *КОРРЕЛЯЦИОННОЕ ПОЛЕ, ЛИНИИ И УРАВНЕНИЯ РЕГРЕССИИ*

Наглядно корреляционная зависимость может быть выражена графически. На осях абцисс и ординат откладываются значения вариационных рядов. Для каждого отдельного наблюдения получают значения в каждом из вариационных рядов. Эти значения (при данном наблюдении) соответствуют друг другу и их совокупность обозначается точкой на плоскости. Число таких точек оказывается равным числу наблюдений. Совокупность точек на плоскости называется **корреляционным полем,** оно создаёт общую картину корреляции и обычно позволяет построить усреднённую кривую – **линию регрессии** – взаимосвязи параметров, составляющих два вариационных ряда.

Если между величинами существует связь, то корреляционное поле имеет вид элипса со сгущениям точек вокруг главной оси и их малым числом на периферии (рис. 1).



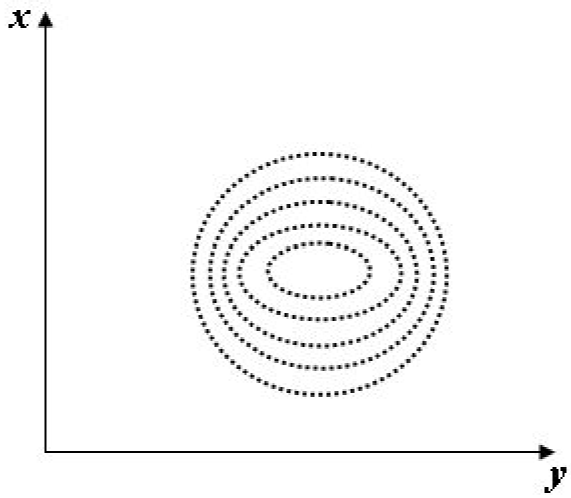


Рис 1. Линия регресии $r_{x,y}>0$,

Рис 2. Отсутствие корреляционной связи $r_{x,y}=0$

Если связь выражена слабо, то разброс точек велик (рис. 2).

При корреляционной зависимости изменение одной из величин влечет изменение математического ожидания другой. Эту зависимость можно записать в помощью уравнения вида:

$\mathrm{M}(y)_x = f(x)$ - уравнение регрессии ***y*** на ***x***.

$\mathrm{M}(y)_x$ - это условное математическое ожидание величины ***y***, соответствующее данному значению ***x***.

x - отдельные значения величины ***x***.

f(x) - некоторая функция

$\mathrm{M}(x)_y = f(y)$ - уравнение регрессии ***x*** на ***y***.

Функции ***f(x)*** и ***f(y)*** называют регрессиями ***y*** на ***x*** и ***x*** на ***y*** соответственно. Графики этих функций называются **линиями регрессии.**

Корреляционная зависимость может быть линейной, квадратической, экспоненциальной и т.д.

Если ***f(x)*** и ***f(y)*** – линейные функции, то уравнения регрессии имеют вид:

$$\mathrm{M}(y)_x = Ax + B$$

$$\mathrm{M}(x)_y = \mathrm{C}y + \text{Д},$$

где ***A, B, C, Д*** – это некоторое параметры. Для определения этих параметров применяют метод наименьших квадратов (рассматривать не будем).

3. *КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ И ЕГО СВОЙСТВА*

Мера зависимости между вариационными рядами характеризуется коэффициентом корреляции. Для линейной корреляционной зависимости угловые коэффициенты прямых регрессии выражаются через коэффициент корреляции, который определяется по формуле Пирсона:

$$r_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}},$$

где $r_{x,y}$ - коэффициент корреляции

x_i, y_i – значения параметров в i-том наблюдении

n – число наблюдений

$\bar{x}, \bar{y}$ - средние значения параметров ***x*** и ***y*** для ***n*** проведённых наблюдений.

или:

$$r_{x,y} = \frac{M\left[(x - M(x))\cdot(y - M(y))\right]}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y} M\left[(x - M(x))\cdot(y - M(y))\right] = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \sigma_y},$$

где σ_x, σ_y - генеральные средние квадратические отклонения,

$k_{x,y}$- называется корреляционным моментом или ковариацией.

Коэффициент корреляции показывает долю рассеяния величины ***x*** под влиянием ***y*** (и наоборот).

4. *СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ*

Величина коэффициента корреляции всегда заключена в пределах:

$$-1 \le r_{xy} \le 1$$

1. Если ***r<0***, то с увеличением в вариационном ряду наблюдаемых значений ***x*** соответствующие им значения ***y*** вариационного ряда уменьшаются.
2. Если ***r>0,*** то с увеличением одного параметра другой параметр в среднем возрастает.
3. Если ***r=0***, то параметры ***x*** и ***y*** абсолютно независимы друг от друга.
4. Если ***r=1***, то между параметрами ***x*** и ***y*** существует прямо пропорциональная функциональная зависимость.

5. Чем больше по абсолютной величине $r_{x,y}$, тем сильнее проявляется связь между ***x*** и ***y***, тем ближе эта зависимость к функциональной и тем значительнее влияние ***x*** *(*или **у***)* на ***y*** (или ***x***) среди всех других влияющих факторов.

6. Чем больше абсолютная величина $r_{x,y}$, тем больше доверительная вероятность того, что характер этой связи действительно соответствует полученному коэффициентному корреляции.

Принято считать, что связь между исследуемыми параметрами или явлениями:

а) слабая при $r_{x,y} < 0{,}3$

б) средняя при $0{,}3 < r_{x,y} < 0{,}7$

в) тесная при $r_{x,y} > 0{,}7$

5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ

Для экспериментального изучения зависимости между двумя величинами ***x*** и ***y*** производят некоторое количество ***n*** независимых испытаний:

$$x_1,\ x_2,\dots,x_n$$

$$y_1,\ y_2,\dots,y_n$$

Результат *i*-того измерения дает пару значений $\boldsymbol{x_i}$, $\boldsymbol{y_i}$ ($\boldsymbol{i}=1,2,\dots n$).

Вычисления производят в следующем порядке:

1. Вычисляют выборочные средние:

$$\overline{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \quad \overline{y}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i;$$

2. Вычисляют выборочные средние квадратические отклонения:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_в\right)^2}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}_в\right)^2}$$

3. Вычисляют оценку ковариации.

$$k_{x,y} = M\left[(x - M(x))(y - M(y))\right] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_в\right)\left(y_i - \overline{y_в}\right)$$

4. Вычисляют коэффициент корреляции

$$r_{x,y} = \frac{k_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Эталоны решения типовых задач

Задача 1. Рассчитать коэффициент парной линейной корреляционной зависимости, сделать вывод по знаку коэффициента корреляции и о степени связи следующих величин.

Объем крови $\boldsymbol{x}_i$ *(л)*	4,22	4,69	5,04	4,34	4,22	4,8	4,45	4,69	4,92	4,57
Вес $\boldsymbol{y}_i$, *(кг)*	52	73	86	54	50	74	61	69	80	66

Решение. Определим выборочные средние:

$$\overline{x}в = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 4{,}59\,(л)$$

$$\overline{y}_в = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = 66{,}5\,(кг)$$

Составим таблицу:

											Σ
$\left(x_i - \overline{x}\right)$ ***(л)***	-0,37	0,1	0,45	-0,25	-0,37	0,21	-0,14	0,1	0,33	-0,02	
$\left(x_i - \overline{x}\right)^2$ ***(л²)***	0,14	0,01	0,20	0,06	0,14	0,04	0,02	0,01	0,11	0,0004	**0,73**
$\left(y_i - \overline{y}\right)$ ***(кг)***	-14,5	6,5	19,5	-12,5	-16,5	7,5	-5,5	2,5	13,5	-0,5	
$\left(y_i - \overline{y}\right)^2$ ***(кг²)***	210,25	42,25	380,25	156,25	272,25	56,25	30,25	6,25	182,25	0,25	**1336,5**
$\left(x_i - \overline{x}\right)\cdot\left(y_i - \overline{y}\right)$ ***(л,кг)***	5,36	0,65	8,77	3,125	6,10	1,57	0,77	0,25	4,45	0,01	**31,05**

Вычислим выборочные среднеквадратические отклонения:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{0{,}73}{9}} = 0{,}285 \ (л)$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{1336{,}5}{9}} = 12{,}186 \ (кг)$$

Вычислим оценку ковариации:

$$k_{xy} = M\left[\left(x - M(x)\right)\left(y - M(y)\right)\right] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right) = \frac{31{,}05}{9} = 3{,}45 \ (л,\ кг)$$

Вычислим коэффициент корреляции:

$$r_{xy} = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{3{,}45}{0{,}285 \cdot 12{,}186} = \frac{3{,}45}{3{,}47} = 0{,}994$$

Вывод: С увеличением веса человека объем циркулирующей крови увеличивается, причем связь между этими параметрами является сильной.

Задача 2. Рассчитать коэффициент парной корреляционной зависимости, сделать вывод по знаку коэффициента корреляции, о степени связи между величинами, построить корреляционное поле и провести линию регрессии:

Основной обмен веществ $\boldsymbol{x_i}$ (%)	50	70	20	30	70	10	80	60	40	55
Амплитуда артериального давление $\boldsymbol{y_i}$ (мм рт.ст.)	70	100	50	60	80	40	100	80	65	75

Решение

Вычислим выборочные средние $\overline{x_B}$ и $\overline{y_B}$:

$$\overline{x_B} = \frac{50+70+20+30+70+10+80+60+40+55}{10} = 48{,}5(\%) \approx 49(\%),$$

$$\overline{y_B} = \frac{70+100+50+60+80+40+100+80+65+75}{10} = 72 \ (\text{мм рт.ст})$$

Заполним таблицу:

$x_i - \overline{x_B}$ (%)	1	21	-29	-19	21	-39	31	11	-9	6	
$\left(x_i - \overline{x_B}\right)^2$ (%)^2	1	441	841	361	441	1521	961	121	81	36	$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_B})^2 = 4805$
$y_i - \overline{y_B}$ (мм рт.ст.)	-2	28	-22	-12	8	-32	28	8	-7	3	
$\left(y_i - \overline{y_B}\right)^2$ (мм рт.ст.)^2	4	784	484	144	64	1024	784	64	49	9	$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y_B})^2 = 3410$
$\left(x_i - \overline{x_B}\right)\left(y_i - \overline{y_B}\right)$ (%, мм рт.ст.)	-2	588	638	228	168	1248	868	88	63	18	$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_B})(y_i - \overline{y_B}) = 3905$

Вычислим выборочные средние квадратичные отклонения $\boldsymbol{\sigma_x}$ и $\boldsymbol{\sigma_y}$:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_B})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{4805}{9}} = \sqrt{533{,}9} = 23{,}11(\%),$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y_B})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{3410}{9}} = \sqrt{378{,}9} \approx 19{,}47 \text{ (мм.рт.ст)}$$

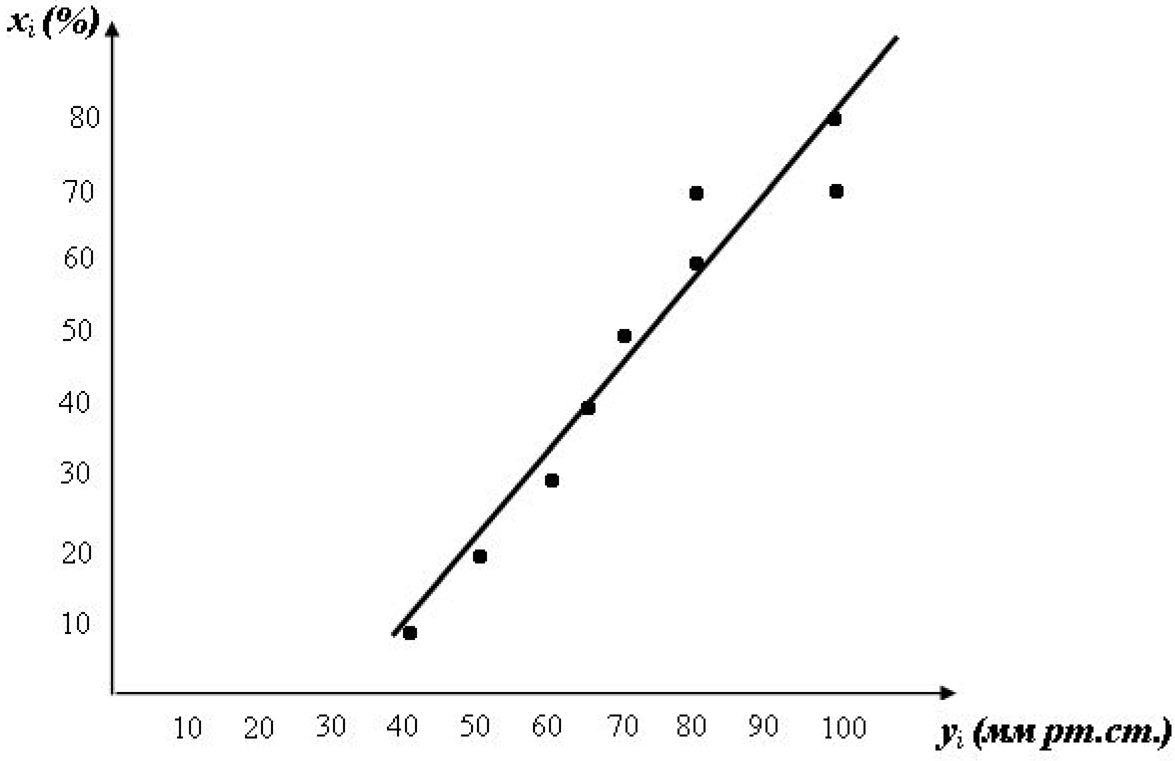
Вычислим оценку ковариации $\boldsymbol{k_{x,y}}$**:**

$$\mathrm{k}_{x,y} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x_B})(y_i - \overline{y_B}) = \frac{3905}{9} = 433{,}89$$

Вычисляем коэффициент корреляции $\boldsymbol{r_{x,y}}$**:**

$$\mathrm{r}_{x,y} = \frac{k_{x,y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{433{,}89}{23{,}11 \cdot 19{,}47} = 0{,}96$$

Построим корреляционное поле и проведем линию регрессии:



Вывод: Связь между основным обменом веществ (%) и амплитудой артериального давления (мм рт. ст) очень тесная, так как, $r_{x,y}>0{,}7$ и с увеличением основного обмена амплитуда артериального давления растет (почти прямо пропорциональная зависимость, так как $r_{x,y} \approx 1$).

Задача 2. Рассчитать коэффициент корреляции при атеросклерозе между площадью поражений артерий таза (%) и возрастом больного. Сделать вывод о связи исследуемых величин.

									n=8
x (%)	22,3	3,1	48,3	17,0	7,5	40,2	23,1	16,0	$\overline{x}_в = 22,2$
y (годы)	55	35	75	50	45	65	55	45	$\overline{y}_в = 53,1$
$\left(x_i - \overline{x}\right)$ *(%)*	0,1	-1,91	26,1	-5,2	-14,7	18	0,9	-6,2	
$\left(x_i - \overline{x}\right)^2$ *(%)²*	0,01	364,8	681,2	27	216,1	324	0,81	38,4	∑=1652,3
$\left(y_i - \overline{y}\right)$ *(год)*	1,9	-21,1	21,9	-3,1	-8,1	11,9	1,9	-8,1	
$\left(y_i - \overline{y}\right)^2$ *(год)²*	3,6	445,2	4,796	9,6	65,6	141,6	3,6	65,6	∑=1214,4
$\left(x_i - \overline{x}\right)\cdot\left(y_i - \overline{y}\right)$ *(%, год)*	0,2	403	571,6	16,1	119,1	214,2	1,71	50,2	∑=1376,1

Вычислим выборочные среднеквадратические отклонения:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{1652,3}{7}} = 15,4 \text{ (\%)},$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{1214,4}{7}} = 13,2 \text{ (год)}.$$

Вычислим оценку ковариации:

$$k_{x,y} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right) = \frac{1376,1}{7} = 196,6 \text{ (\%, год)}.$$

Вычислим коэффициент корреляции:

$$r_{xy} = \frac{k_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{196,6}{15,4 \cdot 13,2} = \frac{196,6}{203,3} = 0,967\,.$$

<u>Вывод:</u> С увеличением возраста больного атеросклерозом площадь поражений артерий таза увеличивается. Связь между этими параметрами является сильной.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Задачи для домашнего решения

Рассчитать коэффициент парной линейной корреляционной зависимости, сделать вывод по знаку коэффициента корреляции и о степени связи между следующими величинами

а)

Амплитуда вызванных потенциалов мозга (мкВ)	2,3	4,0	7,4	4,5	6,7	10,0	9,2	10,8	8,3	15,2
Латентный период (мс)	15,7	20,6	25,6	34,6	48,5	66,6	96,1	127,2	73,5	178,4

б)

Вес щитовидной железы (г)	12	59	62	95	102	23	203	270	122	41
Площадь стеннографического изображения (см^2)	11	32	33	44	46	17	73	89	52	25

Задачи для решения на практическом занятии.

Рассчитать коэффициент парной корреляционной зависимости, сделать вывод по знаку коэффициента корреляции, о степени связи между величинами, построить корреляционное поле и провести линию регрессии для следующих рядов значений:

а)

Объем циркулирующей крови (л)	4,83	5,09	3,81	5,34	4,06	5,37	4,32	5,59	4,57	5,80
Рост (см)	170	175	150	175	155	180	160	185	165	190

б) (атеросклороз)

Площадь поражения артерий таза (%)	22,3	3,1	48,3	17,0	7,5	40,2	23,1	16,0	2,8	6,3
Возраст (в годах)	55	35	75	50	45	65	55	45	30	40

ЗАМЕТКИ ДЛЯ АСПИРАНТОВ И СОИСКАТЕЛЕЙ

Цель большинства исследований состоит в сборе данных, которые впоследствии помогают получить информацию в какой-либо области знания. Данные основываются на измерениях одной или нескольких переменных. Термин «переменная» означает количественный показатель, способный изменяться. Например, мы можем собрать основную клиническую и эпидемиологическую информацию о больных со специфической болезнью. Переменные, вызывающие интерес, могут включать пол, возраст и рост больного, различные физиологические или биохимические параметры и т.д.. Обычно мы получаем данные из выборки индивидуумов, которые представляют популяцию. Наша цель состоит в том, чтобы сгруппировать эти данные и извлечь из них нужную информацию. Именно статистические методы исследования, являясь мощным инструментом обработки больших массивов информации, позволяют извлечь необходимую информацию с целью обнаружения закономерностей, лежащих в основе изучаемых явлений и проверки обоснованности выдвигаемых предложений. Медицинские исследования требуют объективного анализа полученных данных, так как неправильные выводы из полученных результатов могут нанести ущерб здоровью человека. Современные вычислительные средства, в частности, такие мощные вычислительные пакеты прикладных программ как SPSS и Statistica, позволяют превратить трудоемкие расчеты в увлекательное занятие и сводят требования к математической подготовки пользователя практически к нулю. Однако эти же обстоятельства резко увеличивают требования к способности пользователя интерпретировать полученные результаты, что в свою очередь, требует ясного понимания используемых для интерпретации результатов вычислений. Отсутствие, во многих случаях такого понимания, зачастую приводит к написанию текстов, напоминающих камлания шаманов, а не научную работу. Поэтому, приведенные ниже два раздела преследуют цель дать аспирантам и соискателям понимание основных понятий, используемых при решении двух, наиболее часто встречаемых задач при статистической обработке диссертационных материалов: сравнения средних и изучения связи между переменными. Безусловно, эти заметки не нацелены на то, чтобы дать пользователям инструмент для вычислений. Реальные вычисления необходимо производить с помощью указанных выше пакетов прикладных программ или других программ. Однако проведение расчетов на примере простейших задач позволяет снять налет мистики с получаемых в расчетах параметров и, тем самым, обеспечить понимание, а значит и возможность правильной интерпретации. Кроме того, уверенность в понимании решения предлагаемых в данных заметках двух задач безусловно снимет барьер «страха» перед математическими методами статистических расчетов в других задачах.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. СРАВНЕНИЕ СРЕДНИХ.
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Все тела и процессы в природе обладают свойствами. Если мы придумали способ как измерять эти свойства, то будем называть эти свойства величинами. Напомним, что измерить – значит сравнить с эталоном.

Бывают свойства, для которых нельзя или очень трудно придумать способ для их измерения. Такие величины будем называть качественными величинами. Рассмотрим примеры. Человечество уже давно и очень точно может предсказывать, например, солнечные затмения. Можно предсказать время затмения на несколько столетий вперед. Интуитивно ясно, что назвать время следующего солнечного затмения случайной величиной язык не поворачивается. Действительно, это не случайная, а детерминированная (строго определенная) величина. Другой пример представляет изучение верхнего артериального давления. Можем ли мы предсказать заранее каким окажется артериальное давление у случайно выбранного человека? Конечно, нет – это случайная величина.

Итак, случайные величины - это такие величины, значения которых до проведения испытания (опыта) точно предсказать нельзя. Очевидно, что в медицине, мы, в большинстве случаев, имеем дело со случайными величинами. Может сложиться впечатление, что если величина случайная, то и предсказать результат испытания (опыта) совершенно невозможно. Если говорить о точном значении результата опыта, то это действительно так. Но все-таки у нас есть понятие, которое позволяет очень плодотворно работать со случайными величинами.

Это понятие – ВЕРОЯТНОСТЬ!

Понятие вероятности интуитивно есть у каждого человека. Например, мало кто ошибется в ответе на вопрос: какая вероятность больше, встретить первого взрослого человека на улице ростом от 50 до 60 сантиметров или ростом от 160 до 170. Рост – это непрерывная случайная величина и здесь слово «непрерывная» играет существенную роль, поскольку позволяет задать вопрос, а чему равна вероятность встретить человека ростом 165,123 см? Очевидно, что такая вероятность практически равна нулю (невозможное событие). Поэтому когда рассчитывают вероятность для той или иной непрерывной случайной величины всегда рассчитывают эту вероятность для какого либо диапазона. В нашем случае надо рассчитать вероятности для двух диапазонов: 50-60 см и 160-170.

ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Итак, мы приходим к задаче: как найти вероятность, что при следующем испытании случайная величина попадет в наперед заданный интервал?

Для ответа на этот вопрос, прежде всего надо ввести понятие закона распределения случайной величины.

Закон распределения случайной величины (ЗРСВ) – это способ рассчитать вероятность того, что случайная величина (СВ) примет то или иное значение (для дискретных случайных величин) или попадет в тот или иной интервал (для непрерывных случайных величин) в результате испытания.

Для дискретных СВ это чаще всего таблица. Например, для правильной игральной кости эта таблица будет выглядеть так:

1	2	3	4	5	6
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Выпадение 1, 2, 3, 4, 5, или 6 равновероятно и равно одной шестой.

Для непрерывной случайной величины, ЗРСВ может быть задан или в виде графика или в виде формулы. Наибольшее значение в математической статистике имеет нормальный закон распределения случайной величины или закон Гаусса.

Это связано с тем, что очень многие СВ распределены именно по этому закону, в том числе и в биологии и медицине.

Итак, для вычисления вероятностей нам нужен закон Гаусса. Рассмотрим этот закон.

Поставим задачу более точно. Пусть у нас есть некоторая непрерывная случайная величина X и мы хотим узнать какова вероятность, что при следующем испытании эта величина примет значение x_i, лежащие в маленьком интервале от x до x+dx (здесь dx – дифференциал x). Тогда вероятность $P(x_i)$, что при следующем испытании это произойдет, по закону Гаусса будет равна:

$$P(x_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x_i-\mu}{\sigma})^2} dx \qquad \textbf{(1)}$$

Формула (1) позволяет рассчитать вероятность попадания следующего измерения в бесконечно маленький интервал dx. Но на практике нам надо научиться рассчитывать вероятность попадания в реальные интервалы, например в интервал от x=a до x=b. Это можно сделать с помощью формулы (2):

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \qquad \textbf{(2)}$$

Поскольку интервал (a,b) мы задаем сами, следовательно, для расчета вероятности того, что результат следующего испытания попадет в этот интервал нам надо знать только два числа: μ - **математическое ожидание** и σ - **среднее квадратическое отклонение**.
Таким образом, оценка этих двух чисел является одной из основных задач математической статистики.

Итак, чтобы решить главную задачу, которая как мы знаем, состоит в том, чтобы научиться рассчитывать вероятность попадания случайной величины в тот или иной наперед заданный интервал, нам надо научиться рассчитывать эти два числа. Вот здесь нас ожидает неудача, поскольку точно рассчитать эти два числа оказалось невозможным! Оказалось, что для того чтобы точно получить эти два числа, например для случайной величины «рост», надо измерить рост у всех людей в мире! Ясно, что мы этого сделать не можем. Что же нам остается? А остается нам измерить рост у тех людей, до которых мы можем добраться, и по полученным значениям ОЦЕНИТЬ значения μ и σ. Подчеркну: не получить точные значения, а только оценить чему приблизительно они равны. Вот эти оценки, которые называются выборочным арифметическим средним ($\bar{x}$) и оценкой среднеквадратичного отклонения (s) и являются самой первой целью большинства статистических исследований.

В нашем рассмотрении неожиданно появилось слово «выборочная». Попробуем объяснить, что оно значит. Для этого введем следующее определение:

Совокупность объектов, из которой отбирается некоторая часть ее членов для изучения, называется генеральной, а отобранная тем или иным способом часть генеральной совокупности называется выборочной совокупностью или выборкой.

В случае с ростом генеральной совокупностью является рост всех людей, тогда как те люди, у которых мы смогли измерить рост, называются выборкой из этой совокупности. Очевидно, что это определение справедливо для любой случайной величины.

РАСЧЕТ $\overline{x}$ И S.

Расчет этих двух величин очень прост и задается следующими двумя формулами:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad (3)$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}} \quad (4)$$

Чтобы пояснить формулы (3) и (4), представим себе, что мы измеряли рост у 50 человек. Это значит что n=50. Далее складываем все 50 полученных чисел и полученный результат делим на 50. Получаем значение среднего арифметического. Это все расчеты по формуле (3). Расчеты по формуле (4) несколько сложнее. Сначала от всех полученных в результате измерений 50 чисел отнимаем ранее полученную оценку среднего. Получаем 50 значений разности. Потом все 50 разностей возводим в квадрат, после чего все их складываем. Полученный результат делим на 49 (n-1). Из того что получилось, извлекаем квадратный корень. Расчеты среднего арифметического и оценки среднеквадратичного отклонения закончены.

Теперь, когда мы имеем оценки среднего и среднеквадратичного отклонения нам необходимо вернуться к формуле (2). Действительно, оценки μ и σ у нас есть, интервал (a,b) задаем сами, осталось взять интеграл... Но здесь нас подстерегает новая неприятность! Неопределенный интеграл такого вида не берется в элементарных функциях. На наше счастье мы имеем дело не с неопределенным интегралом, а с определенным интегралом. Как мы помним из предыдущего курса, определенный интеграл есть число и существует достаточно много численных методов получения этого числа с любой наперед заданной точностью. Применив один из этих методов, мы получим число, которое и будет вероятностью попадания следующего измерения случайной величины в интервал (a,b). Изменив границы интервала и проведя аналогичные расчеты мы получим вероятность попадания случайной величины в этот новый интервал и т.д. Задача вроде бы решена. У нас есть методика расчета вероятности попадания случайной величины в любой наперед заданный интервал. Однако проведение таких расчетов не очень удобно, поскольку требует много вычислений. Можно ли облегчить себе жизнь?

Ну, первое, что приходит на ум это рассчитать все значения интеграла для интервалов, изменяющихся с определенным (небольшим шагом) и занести их в таблицу. Тогда можно пользоваться этой таблицей и ничего не считать. Но эта таблица будет верна, только для той случайной величины, для которой она рассчитывалась. Получается, что нам надо создавать бесчисленное количество таблиц для всевозможных случайных величин. Ясно, что здесь тоже надо что-то придумать. Человечество придумало, как обойтись одной таблицей для всех случаев. Для этого от нашей случайной величины X (любой, которую мы изучаем) надо перейти к другой случайной величине Z, используя следующее соотношение:

$$Z = \frac{X - \bar{x}}{s} \qquad (5)$$

Что же мы получим в результате этой операции? Мы получим новую случайную величину, для которой $\bar{z} = 0$ и s = 1. Эта случайная величина называется **нормированной нормально распределенной случайной величиной Z.** Поскольку эту операцию можно провести для ЛЮБОЙ случайной величины, подчиняющейся закону Гаусса, мы можем любую случайную величину свести к случайной величине Z, а, следовательно, для расчета вероятности попадания исходной случайной величины в наперед заданный интервал построить ТОЛЬКО ОДНУ таблицу. Конечно же, такая таблица была давно построена, она приведена в приложении 3 и называется таблицей **значений функции распределения нормированной нормально распределенной случайной величины**

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \; .(6).$$

Научимся пользоваться этой таблицей. Например рассмотрим число стоящее на пересечении строки, начинающейся с 0,5 и столбца, помеченного цифрой 5. Это число равно 0,7088. Оно показывает, что при следующем испытании вероятность что случайная величина примет значение МЕНЬШЕ 0,5**5** равна 0,7088. Обратите внимание, что номер столбца есть сотый знак заданного нами числа. Теперь поставим задачу так. Как пользуясь таблицей найти вероятность попадание в интервал (z_1,z_2), ведь это и есть наша основная задача. Если $z_2 > z_1$, то искомая вероятность будет равна разности **Ф(z_2)–Ф(z_1).** Например, найдем вероятность, что при следующем испытании значение нормированной случайной величины попадет в интервал (0,95; 1,54). Сначала найдем Ф(1,54). Для этого найдем в таблице строку, которая начинается с 1,5, потом двигаемся по этой строке до столбца, помеченного цифрой 4. Там стоит значение Ф(1,54) = 0,9382. Аналогичным образом найдем Ф(0,95) = 0,8289. Тогда искомая вероятность будет равна: P = 0,9382 – 0,8289 = 0,1093.

Для полного решения поставленной задачи осталось ответить только на один вопрос: а что если значения z получатся отрицательные? Ведь в таблице приложения 3 нет отрицательных значений. Ответ на этот вопрос дает следующая формула:

Ф(-z) = 1 – Ф(z) (7).

Из формулы (7) следует: если z получилось отрицательным, то надо найти значение Ф(z) по таблице считая z положительным, а потом найденное значение отнять от единицы, это и будет ответом. Теперь задача нахождения вероятности попадания случайной величины, распределенной по закону Гаусса, в любой наперед заданный интервал решена полностью

Для иллюстрации введенных в рассмотрение понятий разберем следующий пример. Пусть в родильном доме за сутки родилось 20 детей, вес которых с точностью до 0,1 килограмма приведен в таблице 1.

Таблица 1

Вес новорожденных в килограммах

X	1,8	2,1	3,1	4,2	3,6	2,2	3,1	3,9	4,4	2,6
	3,3	3,8	3,3	4,8	2,8	3,6	3,4	2,8	3,7	3,2

Надо рассчитать какова вероятность, что вес первого новорожденного в следующие сутки будет находиться между двумя и тремя килограммами.

Итак, в формуле (2) a=2, b=3

1. По формулам (3) и (4) найдем среднее арифметическое и оценку среднеквадратического отклонения: Получим следующие значения: $\bar{x} \approx 3{,}3 \quad s \approx 0{,}7$
2. Для нижней границы интервала (a=2) построим значение z по формуле (5). $z = \dfrac{2-3{,}3}{0{,}7} = -1{,}86$
3. Тоже самое сделаем для верхней границы: $z = \dfrac{3-3{,}3}{0{,}7} = -0{,}42$
4. Найдем Ф(-0,42). Для этого в таблице приложения 3 найдем сначала Ф(0,42) = 0,6628. Тогда Ф(-0,42) = 1 – 0,6628 = 0,3372.
5. Теперь найдем Ф(-1,86). Аналогично предыдущему Ф(1,86)= 0,9686 и Ф(-1,86) = 1 – 0,9686 = 0,0314

6. Таким образом, вероятность, что следующим родиться ребенок с весом в интервале от 2 до 3 кг равна Р = 0,3372 – 0,0314 = 0,3058

Задача 2.

Решение первой задачи хотя и важно, но конечно не достаточно для практических целей. Следующей важнейшей задачей статистики является получение ответа на вопрос можно ли считать, что какой-то эффект действительно существует или необходимо признать, что на самом деле эффекта нет, и все, что мы наблюдаем есть игра случая. Под эффектом может подразумеваться все что угодно, например, действительно ли жители Скандинавии выше ростом жителей Африки, действительно ли одно лекарство эффективнее другого, действительно ли физиологические параметры изменяются в процессе адаптации, действительно ли успеваемость в одном классе выше успеваемости в другом и т.д.

Очевидно, что все эти задачи нацелены на сравнение двух выборок. Встает вопрос как это сделать. Допустим, мы измеряли рост 10000 жителей Скандинавии и 10000 жителей Африки. Таким образом, мы имеем два набора по 10000 чисел. Ясно, что просто разглядывая эти числа, мы мало чего добьемся. Возникает потребность описать каждый из наборов небольшим количеством производных от них параметров и уже потом сравнивать не сами числа, входящие в тот или иной набор, а эти вновь полученные параметры, характеризующие каждый из наборов. Поскольку вновь полученные параметры описывают сделанную выборку, они получили название «описательные статистики». Описательные статистики можно разделить на несколько групп. Мы будем рассматривать две из них: меры центральной тенденции и меры рассеивания.

Меры центральной тенденции характеризуют центральное значение, вокруг которого распределены значения случайной величины. К ним относятся средняя арифметическая (введена в рассмотрение в предыдущем разделе) и медиана. Средняя арифметическая хорошо подходит для описания распределений, близких к нормальным. Если же распределение существенно отличается от нормального (например, имеет очень длинные и широкие хвосты), то в этом случае имеет смысл использовать для оценки "центрального" значения медиану.

Как рассчитать среднюю арифметическую мы уже знаем (см. формулу (3) предыдущего раздела). Остановимся на медиане.

Медиана распределения какой-либо случайной величины X – это такое число Me, для которого вероятность, что при следующем испытании получиться значение исследуемой случайной величины больше Me равно 1/2. Это означает, что вероятность получить значение меньше или равно Ме также равна 1/2. Таким образом, медиана характеризует центр распределения в том смысле, что появление значений больше медианы и меньше медианы равновероятны.

Теперь рассмотрим алгоритм, как по значениям выборки оценить медиану. (Обратите внимание на слово «оценить»).

Первое, что надо сделать, это отранжировать, т.е. расположить по возрастающей все значения выборки. Если мы проделаем эту процедуру с выборкой, представленной в предыдущем разделе, то мы получим следующую таблицу:

X	1,8	2,1	2,2	2,6	2,8	2,8	3,1	3,1	3,2	3,3
	3,3	3,4	3,6	3,6	3,7	3,8	3,9	4,2	4,4	4,8

Далее необходимо определить четное или нечетное число значений в выборке. Если число значений нечетное, то медиана равна значению, находящемуся в центре выборки, если число значений четное, то медиана равна полусумме значений, стоящих в центре выборки. В нашем случае число значений в выборке равно 20, т.е. четное. На 10-м месте стоит число 3,3, а на 11 месте также стоит число 3,3. Следовательно, медиана равна: $Me = \frac{3{,}3 + 3{,}3}{2} = 3{,}3$. В нашем случае получилось, что медиана и среднее арифметическое равны, но это не всегда так.

Меры рассеивания характеризуют разброс, с которым случайная величина распределяется вокруг своего центрального значения. К этим мерам относятся дисперсия, среднеквадратичное отклонение (введено в рассмотрение в предыдущем разделе), стандартная ошибка среднего, коэффициент вариации.

Если за центральное значение взять среднее арифметическое, то оценку дисперсии можно вычислить по следующей формуле:

$$D = \frac{\sum_{1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad (8).$$

Для нашего случая $D \approx 0{,}49$

Как видно из сравнения формул (4) и (8) оценка среднеквадратичного отклонения связана с оценкой дисперсии следующим соотношением:

$$s = \sqrt{D} \quad (9)$$

В нашем случае $s \approx 0{,}7$.

Большое значение в медицине при проведении расчетов играет такая мера разброса как стандартная ошибка среднего (m), поскольку результаты проведенных исследований часто представляются в виде: $\bar{x} \pm m$. Формула для расчета оценки стандартной ошибки среднего задается следующим простым соотношением:

$$m = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (10)$$

Для нашего случая $m = \frac{0{,}7}{\sqrt{20}} \approx 0{,}16$

Изложенные выше меры рассеивания (дисперсия, среднеквадратичное отклонение, стандартная ошибка среднего) имеют один недостаток: они дают показатель изменчивости признака в именованных величинах, а не в относительных. Например, для выборки, представленной в Таблице 1, дисперсия будет выражаться в кг^2, а среднеквадратичное отклонение и стандартная ошибка в килограммах. Поэтому сопоставление (или сравнение) разноименных признаков по этим параметрам невозможно. Например, если бы мы измеряли не только вес новорожденных, но и их рост, то используя эти меры разброса нельзя было бы ответить на вопрос где изменчивость больше: в случае веса или в случае роста.

Для сравнения изменчивости двух разноименных выборок удобно пользоваться коэффициентом изменчивости (вариации) признака, который выражается в относительных величинах, а именно в процентах, и вычисляется по формуле:

$$V = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\% \quad (11).$$

В нашем случае $V = \frac{0{,}7}{3{,}3} \cdot 100 \approx 21\%$

Чем больше **V**, тем более изменчив признак. Значения коэффициента вариации, невыходящие за пределы **10%**, принято считать нормальными.

Если **V>20%**, то выборка некомпактна по заданному признаку.

Теперь, когда мы ввели в рассмотрение описательные статистики, задачу определить есть эффект или нет эффекта можно свести к вопросу различаются ли какие либо описательные статистики одной выборки от другой.

Казалось бы решение вопроса очень простое: посчитай описательные статистики одной и второй выборки и сравни их друг с другом. Однако дело обстоит далеко не так просто. Действительно, если бы мы измеряли вес не 20 новорожденных, а скажем, к примеру, только 19, было бы значение среднего и всех остальных описательных статистик тем же самым? Скорее всего НЕТ! Как говорилось, выше мы же всегда имеем дело с выборкой, а не с генеральной совокупностью, поэтому мы всегда получаем ОЦЕНКИ описательных статистик, а не их истинные значения. Следовательно, для решения поставленной задачи нельзя делать выводы, сравнивая непосредственно сами значения. Как же тогда решить задачу?

На помощь приходит понятие доверительного интервала. Идея доверительных интервалов возникает из вопроса: хорошо, мы не знаем точного значения той или иной описательной статистики, но мы хотя бы можем задать интервал, в котором оно находится? Ответ на этот вопрос таков: да мы можем построить интервал, внутри которого содержится точное значение той или иной описательной статистики с наперед заданной вероятностью. Таким образом, мы можем построить доверительный интервал, в котором точное значение описательной статистики содержится с вероятностью, например, 80% или 90%, или 95% или 99% и т.д.

Рассмотрим построение доверительного интервала для среднего значения. В этом случае получается следующее соотношение:

$$\bar{x}\ \mathbf{-mt} < \mu < \bar{x}\ \mathbf{+mt} \quad (12)$$

В формуле (12) $\bar{x}$ - среднее арифметическое**,** μ – математическое ожидание (это и есть «истинное» значение, смотри (2)), m – стандартная ошибка среднего (см. (10)). Остается разобраться, что такое t. Буквой t обычно обозначается значение распределения Стьюдента. Расчет конкретного значения распределения Стьюдента для какого-либо конкретного случая довольно сложная задача, поэтому это распределение уже давно затабулировано и представлено в таблице приложения 4.

Рассмотрим эту таблицу. Для отыскания нужного нам значения надо, прежде всего, ответить для себя на вопрос: с какой вероятность мы собираемся строить доверительный интервал? В приложении 4 приведена таблица, которая позволяет строить доверительные интервалы с вероятностями 0,95, 0,99 и 0,999. Если мы задаемся, к примеру, вероятностью 0,95, значит, мы будем использовать первый столбец таблицы. Для того чтобы найти в этом столбце нужное нам число, надо найти строку, которая начинается с числа равного n-1, где n – число измерений. В нашем случае n=20, значит, мы ищем строку, начинающуюся с 19. На пересечении выбранного столбца и нужной строки и стоит нужное нам значение. В нашем случае это число равно 2,093. Следовательно, доверительный интервал будет $(3{,}3 - 0{,}16 \cdot 2{,}093;\ 3{,}3 + 0{,}16 \cdot 2{,}093)$ или, после вычислений (2,965; 3,635). Итак, истинное среднее (математическое ожидание) с вероятностью 0,95 лежит ГДЕ-ТО между этими двумя числами. Мы написали слово «где-то», чтобы проиллюстрировать одно из свойств доверительных интервалов: любое значение внутри интервала может оказаться математическим ожиданием с одинаковой вероятностью. Второе свойство состоит в том, что мы строили интервал с вероятностью 0,95, это означает, что с этой вероятностью истинное среднее лежит внутри интервала, но это также означает, что с вероятностью 0,05 его нет в данном интервале. Здесь мы впервые сталкиваемся с фундаментальным свойством любого статистического вывода: всегда есть вероятность, что он не верен. Статистический вывод это расчет вероятности справедливости двух гипотез: нулевой и альтернативной. Нулевая гипотеза всегда говорит «нет». Нет различий в описательных статистиках между двумя выборками, нет связи между двумя выборками и т.д. Очевидно, что альтернативная соответственно говорит «да». Возникает вопрос, когда можно считать нулевую гипотезу опровергнутой и принять альтернативную? Для этого нужно задаться уровнем значимости. Уровень значимости - это максимально приемлемая для исследователя вероятность ошибочно отклонить нулевую гипотезу, когда на самом деле она верна. В медицине принят минимальный уровень значимости 0,05. Что это значит? Если в результате расчетов мы получаем что вероятность справедливости нулевой гипотезы меньше 0,05 мы имеем право ее опровергнуть и принять альтернативную гипотезу, тем самым считать доказанным, что различия (а, следовательно, и эффект) есть.

Теперь у нас есть все необходимые понятия, для решения задачи «есть эффект или нет». Пусть мы имеем группу мужчин из 20 больных гипертонией одинакового возрастного диапазона и одинаковой тяжести заболевания. Пусть, далее они принимают новый препарат для снижения артериального давления. Необходимо ответить на вопрос: действительно ли данный препарат эффективен. Проведено фоновое (до лечения) суточное мониторированние систолического артериального давления и получены среднесуточные значения для каждого из 20 человек. После применения схемы лечения, опять проведено суточное мониторированние систолического артериального давления и также получены среднесуточные значения для каждого больного. В результате получены значения представленные в Таблице 2.

Таблица 2

Среднесуточные значения систолического артериального давления до и после лечения

Номер больного	Среднесуточное систолическое давление (до лечения), мм.рт.ст.	Среднесуточное систолическое давление (после лечения) мм.рт.ст.	Разность систолического давления до лечения и после лечения, мм.рт.ст.
1	175	165	+10
2	169	159	+10
3	165	167	-2
4	175	164	+11
5	182	174	+8
6	175	174	+1
7	185	181	+4
8	176	167	+9
9	167	159	+8
10	173	156	+17
11	181	172	+9
12	179	162	+17
13	168	157	+11
14	173	162	+11
15	182	155	+27
16	190	179	+11
17	187	165	+22
18	182	183	-1
19	177	162	+15
20	181	160	+21
$\bar{x}$	**177,1**	**166.2**	**11,0**
s	**6,8**	**8,4**	**7,5**
m	**1,5**	**1,9**	**1,7**
$\bar{x} \pm t \cdot m$	$177{,}1 \pm 3{,}1$	$166{,}2 \pm 4{,}0$	

Алгоритм решения задачи с помощью доверительных интервалов.

1. С помощью формул (3), (4) и (10) найдем соответственно среднее арифметическое, среднеквадратичное отклонение и ошибку среднего ($\bar{x}$, s, m).
2. Построим доверительные интервалы для значений систолического давления до и после лечения. Для этого возьмем из таблицы приложения 4 (таблица распределения Стьюдента) значение для доверительной вероятности 0,95 и числа степеней свободы 19 (20-1). Это значение равно t = 2,086.
3. Сопоставим доверительные интервалы. Наименьшее значение первого интервала равно: 177,1-3,1 = 174,0, наибольшее значение второго интервала равно: 166,2+4,0 = 170,2. Интервалы не перекрываются!! Следовательно, на уровне значимости 0,05 среднее арифметическое до лечения отличается от среднего арифметического после лечения. Следовательно, лечение новым препаратом действительно эффективно.

Таким образом, можно решить Задачу 2 с помощью построения доверительных интервалов. Однако более часто используется другой подход для решения этой задачи. Он построен на вычислении экспериментального значения распределения Стьюдента и сравнения его с табличным.

Для построения этого алгоритма решения задачи 2 надо ввести еще два понятия. Зададимся вопросом можно ли в таблице 2 переставлять экспериментальные данные в столбцах произвольным порядком? Ответ: конечно нет, ведь в таком случае данные, полученные на одном пациенте попадут к другому! Такие выборки называются связанными выборками. В нашем случае они связаны номером пациента. Для таких выборок экспериментальное значение распределения Стьюдента рассчитывается по формуле:

$$t_э = \frac{\bar{d}}{s_d / \sqrt{n}} = \frac{\bar{d}}{m_d} \quad (13)$$

В формуле (13) $\bar{d}$ - среднее арифметическое разности, s_d - среднеквадратичное отклонение для разности, m_d - ошибка среднего для разности. Используя значения в таблице 2, рассчитаем $t_э$.

$$t_э = \frac{11}{1{,}7} = 6{,}47$$

Как мы уже знаем, табличное значение (t_T) для уровня 0,95 и числа степеней свободы 19 (20-1) равно 2,086, следовательно, в нашем случае $t_э > t_T$. Следовательно, наблюдаемые различия в артериальном давлении действительно существуют. В настоящий момент мы делаем этот вывод на уровне значимости 0,05. Но теперь, когда мы имеем экспериментальное значение распределения Стьюдента, мы можем его сравнить с табличными значениями для других доверительных вероятностей. Посмотрим, например, чему равно табличное значение распределения Стьюдента для доверительной вероятности 0,99 (уровень значимости 0,01). Как следует из таблицы приложения 4, это значение равно 2,861, а для доверительной вероятности 0,999 (уровень значимости 0,001) – 3,883. Поскольку 6,47 > 3,883, мы можем сделать вывод о том, что изучаемое лекарство эффективно не только на уровне 0,05, т.е. допуская что вероятность ошибки не больше 5%, но и на уровне 0,001, т.е. вероятность того, что наш вывод не верен не превышает 0,1% !!!

Приведенные выше расчеты справедливы для связанных выборок. Теперь будем решать ту же задачу (действительно ли есть эффект или полученные различия есть не более чем игра случая) для не связанных выборок.

Рассмотрим, как проверяется гипотеза о неравенстве средних для несвязанных выборок. В этом случае экспериментальное значение распределения Стьюдента можно рассчитать по формуле:

$$t_э = \frac{\left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right|}{s\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \quad (14)$$

В формуле (14) $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ соответственно среднее арифметическое для первой выборки и среднее арифметическое для второй выборки. Аналогично n_1- объем первой выборки, n_2- объем второй выборки, s – объединенная оценка среднеквадратичного отклонения двух групп, которая вычисляется по формуле: $s = \sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)\cdot s_1^2 + (n_2 - 1)\cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$

(15)

В формуле (15) s_1 - оценка среднеквадратичного отклонения для первой группы, а s_2 - для второй. $t_э$- значение распределения Стьюдента, рассчитанное по экспериментальным данным.

В таблице 3 приведены значения усредненной по всем оценкам успеваемости двух групп студентов в первом семестре. Необходимо определить, можно ли считать, что одна группа училась лучше другой.

Очевидно, что в данном случае мы имеем дело с несвязанными выборками.

Таблица 3

Осредненная успеваемость студентов двух групп за первый семестр.

№ по	Успеваемость в первой группе	Успеваемость во второй группе
1	4,1	3,1
2	3,8	3,7
3	4,1	3,8
4	3,5	3,2
5	3,2	4,0
6	2,9	3,4
7	3,7	3,6
8	4,2	4,1
9	5,0	3,3
10	2,8	4,2
11	3,6	2,7
12	4,9	3,2
13		2,7
14		3,9
N	12	14
$\overline{x}$	3,82	3,49
s по группам	0,69	0,49
s объединенное среднеквадратичное отклонение		0,59

$\overline{x}$ - рассчитывали по формуле (3), s_1 и s_2 рассчитывали по формуле (4). Используя формулу (15) рассчитаем s:

$$s = \sqrt{\frac{(12-1)\cdot 0{,}69^2 + (14-1)\cdot 0{,}49^2}{12+14-2}} = 0{,}59$$

Теперь используя формулу (14) рассчитаем экспериментальное значение распределения Стьюдента:

$$t_э = \frac{|3{,}82 - 3{,}49|}{0{,}59\sqrt{1/12 + 1/14}} = 1{,}43$$

Далее находим теоретическое значение распределения Стьюдента для доверительной вероятности 0,95 и числом степеней свободы $n_1 + n_2 - 2 = 12 + 14 - 2 = 24$. То есть, ищем число, стоящее на пересечении первого столбца таблицы Приложения 4 и 24 строки. Из таблицы следует, что это число равно $t_T = 2{,}069$.

Следовательно, в нашем случае: $t_Э < t_T$, и мы не имеем права говорить, что одна группа учиться лучше (или хуже) другой. Мы вынуждены признать, что различия, наблюдаемые в успеваемости групп, носят случайный характер, а в целом успеваемость в группах одинакова.

Этим заканчивается решение задачи 2. Осталось сделать только два замечания.

Замечание 1 состоит в том, что приведенные выше схемы расчетов справедливы в том случае, если обе выборки сделаны из генеральных совокупностей, распределенных по закону Гаусса.

Замечание 2. Мы отдаем себе отчет в том, что в настоящее время никто в реальных расчетах считать вручную не будет. Однако для закрепления материала очень полезно провести расчеты с использованием калькулятора. Для этих целей ниже приводится полное решение модельной задачи.

Задача Содержание свободного гепарина крови в двух различных возрастных группах принимало следующие значения:

X_1(мг%)	5,7	5,9	6,3	5,6	4,1	4,0	4,5	5,0	5,1	6,7
X_2(мг%)	5,1	3,2	6,0	5,1	4,9	3,8	6,2	4,5	5,6	5,8

1. Вычислить выборочную среднюю арифметическую, среднеквадратичное отклонение, стандартную ошибку среднего, медиану, коэффициент вариации для каждого ряда и доверительные интервалы для средних. Сравнить средние значения гепарина для двух возрастных групп.

Решение:

Число измерений в каждом ряду n=10.

Выборочная средняя определяется по формуле:

$$\overline{x_B} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

Следовательно для первого ряда она равна:

$$\bar{x}_1 = \frac{5{,}7 + 5{,}9 + 6{,}3 + 5{,}6 + 4{,}1 + 4{,}0 + 4{,}5 + 5{,}0 + 5{,}1 + 6{,}7}{10} = 5{,}3\,(ìã\ \%)$$

Найдем дисперсию по формуле: $s_1^{\;2} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_{1i} - \bar{x}_1)^2}{n-1}$

Следовательно, для первого ряда выборочная дисперсия равна:

$$s_1^{\;2} = \frac{(5{,}7-5{,}3)^2 + (5{,}9-5{,}3)^2 + (6{,}3-5{,}3)^2 + (5{,}6-5{,}3)^2 + (4{,}1-5{,}3)^2 + \ldots + (6{,}7-5{,}3)^2}{9} = 0{,}83$$

Вычислим среднеквадратичное отклонение $s_1 = \sqrt{s_1^{\;2}} = 0{,}91(\grave{\imath}\tilde{a}\ \%)$.

Вычислим стандартную ошибку среднего $m_1 = \dfrac{s_1}{\sqrt{n}}$ $\quad m_1 = \dfrac{0{,}91}{\sqrt{10}} = 0{,}29\,(\grave{\imath}\tilde{a}\ \%)$

Для определения медианы (Me_1) по заданным значениям x_{1i} строим вариационный ряд:

4,0 4,1 4,5 5,0 5,1 5,6 5,7 5,9 6,3 6,7

При четном числе вариант медиана определится как среднее арифметическое из двух центральных вариант:

$$Me_1 = \frac{5{,}1 + 5{,}6}{2} = 5{,}35 \text{ (мг,\%)}$$

Вычислим коэффициент вариации $V_1 = \dfrac{s_1}{\bar{x}_1} \cdot 100\%$. $V_1 = \dfrac{0{,}91}{5{,}3} \cdot 100 = 17{,}2\,(\%)$

Рссчитаем 95% доверительный интервал для среднего. В нашем случае число измерений 10, а доверительная вероятность 0,95. Входим в таблицу приложения 4. На пересечении столбца 0,95 и девятой строки стоит число t= 2,262.

Следовательно, в нашем случае, $m_1 t = 0{,}29 \cdot 2{,}262 = 0{,}66\,(\text{мг\%})$, и значит доверительный интервал будет $ДИ_1\,(5{,}3 - 0{,}66;\, 5{,}3 + 0{,}66)$ или окончательно $ДИ_1\,(4{,}64;\, 5{,}96)$.

Проведя аналогичные расчеты для второго ряда получим:

$\bar{x}_2 = 5{,}0\,(\text{мг\%})$ $\quad s_2^{\;2} = 0{,}93$ $\quad s_2 = 0{,}97\,(\text{мг\%})$ $\quad m_2 = 0{,}30\,(\text{мг\%})$ $\quad Me_2 = 5{,}1\,(\text{мг\%})$ $\quad V_2 = 18{,}6$

$ДИ_2\,(4{,}32;\, 5{,}68)$

Сравнивая доверительный интервал для среднего первого ряда, с доверительным интервалом для второго ряда, легко увидеть, что они сильно перекрываются. Следовательно, наблюдаемые различия между средними являются случайными и мы должны прийти к заключению, что различий между ними нет.

2. Сравнить средние, используя вычисление экспериментального значения распределения Стьюдента.

В данном случае мы имеем дело с не связанными выборками, поэтому для вычисление экспериментального значения будем использовать следующую формулу:

$$t_э = \frac{\left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right|}{s\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}.$$

Вычислим объединенная оценка среднеквадратичного отклонения двух групп:

$$\boldsymbol{s = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\cdot s_1^2 + (n_2 - 1)\cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{\frac{(10-1)\cdot 0{,}83 + (10-1)\cdot 0{,}93}{10+10-2}} = 0{,}94}$$

Тогда $t_{ý} = \dfrac{|5{,}3 - 5{,}0|}{0{,}94\sqrt{\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10}}} = 0{,}71$. Число степеней свободы в нашем случае равно n=10+10-2=18. Итак, входим в таблицы Приложения 4 по восемнадцатой строке и первому столбцу. На пересечении стоит число 2,103. Это число намного больше, чем полученное 0,71. Следовательно, мы приходим к тому же заключению, что средние двух выборок не различаются.

Итак, ответ в данном случае, будет выглядеть так:

$\boldsymbol{\bar{x}_1 = 5{,}3мг\% \quad \bar{x}_2 = 5{,}0мг \quad \bar{s}_1 = 0{,}91мг\% \quad \bar{s}_2 = 0{,}97мг\% \quad m_1 = 0{,}29мг\% \quad m_2 = 0{,}3мг\%}$
$\boldsymbol{Me_1 = 5{,}35мг\% \quad Me_2 = 5{,}1мг\% \quad V_1 = 17{,}2 \quad V_2 = 18{,}6}$.

$\boldsymbol{ДИ_1 = (4{,}64;5{,}96) \quad ДИ_2 = (4{,}32;5{,}68) \quad t_э = 0{,}71 < 2{,}103}$

Достоверных различий между средними нет.

ГЛАВА 2 КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

ВЕДЕНИЕ. ПОНЯТИЕ КОРРЕЛЯЦИИ

Корреляция, или коэффициент корреляции, — это статистический показатель вероятностной связи между двумя переменными, измеренными в количественной шкале. В отличие от функциональной связи, при которой каждому значению одной переменной соответствует строго определенное значение другой переменной, вероятностная связь характеризуется тем, что каждому значению одной переменной соответствует множество значений другой переменной. Примером вероятностной связи является связь между ростом и весом людей. Ясно, что один и тот же рост может быть у людей разного веса, как и наоборот. Величина коэффициента корреляции меняется от -1 до 1. Крайние значения соответствуют линейной функциональной связи между двумя переменными, 0 — отсутствию связи.

Строгая корреляция является математической абстракцией и практически не встречается в реальных исследованиях. Примером строгой корреляции является соответствие между временем пути и пройденным расстоянием при неизменной скорости. Нулевой коэффициент корреляции говорит о том, что значения переменных никак не связаны друг с другом. Примером пары величин с нулевой корреляцией является рост человека и результат его IQ-теста. (цитируется по: Наследов А. Д. SPSS: Компьютерный анализ данных в психологии и социальных науках. — СПб.: Питер, 2005. —416 с.)

Как отмечалось выше, процесс постановки диагноза – это в значительной степени процесс выявление взаимосвязей (корреляций) между различными параметрами (симптомами). Возникновение или исчезновение таких взаимосвязей часто может свидетельствовать или о нарастании патологического процесса или, наоборот, о положительной динамике. Установление корреляций между различными показателями состояния больного и влияние их изменений на жизнедеятельность организма является важной задачей также лабораторных и клинических исследований.

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ, СТАТИСТИЧЕСКАЯ И КОРРЕЛЯЦИОННАЯ СВЯЗИ

Две случайные величины X и Y могут быть связаны функциональной зависимостью, статистической или быть независимыми. Как мы помним из курса математики, **функциональной зависимостью называется такая зависимость, когда с помощью какого-либо закона (функции) заданному значению X ставится в соответствие одно (или несколько) значений Y**. Как отмечалось выше, точная функциональная зависимость в медицине практически не реализуется, так как обе величины X и Y или одна из них могут быть подвержены действию случайных факторов, в том числе и общих для них. В таком случае возникает статистическая связь.

Рассмотрим две случайные величины X и Y. Как мы уже знаем из предыдущего рассмотрения, для каждой из них существует свой закон распределения. Допустим далее, что Y зависит от X.

Статистической связью **называется связь между величинами X и Y, при которой изменение одной из величин вызывает изменение закона РАСПРЕДЕЛЕНИЯ другой.** Если мы имеем дело со случайными величинами, распределенными по нормальному закону, то это означает, что изменение X может приводить к изменению или дисперсии или среднего (или того и другого) случайной величины Y. Рассмотрим ситуацию, когда изменяется среднее.

Хорошо известной является статистическая связь веса и роста. Выберем четырех людей одного роста, равного 165 см (то есть зададим x=165 см). Измерим их вес. Допустим, у нас получилось четыре значения: 62, 68, 59 и 65 килограмм. Найдем среднее арифметическое этих величин: $\bar{y}_{165} = \dfrac{62+68+59+65}{4} = 63{,}5\ (кг)$

Число $\bar{y}_{165}$ называется условным средним; черта над y есть обозначение среднего арифметического, а число 165 показывает, что рассматриваются те значения Y, которые соответствуют x=165 см. Таким образом, условным средним $\bar{y}_x$ называется среднее арифметическое значений y, соответствующих значению $X=x$.

Если каждому значению x соответствует **одно** значение условной средней, то условная средняя есть функция x. В этом случае говорят, что случайная величина Y связана с X корреляционно.

Итак, **корреляционной зависимостью** Y от X называется **функциональная зависимость** условной средней $\bar{y}_x$ от x:

$$\bar{y}_x = f(x) \quad \textbf{(1)}$$

УРАВНЕНИЯ И ЛИНИИ РЕГРЕССИИ. КОРРЕЛЯЦИОННОЕ ПОЛЕ

Уравнение (1) называется ***уравнением регрессии*** Y на X; функция $f(x)$ называется ***регрессией*** Y на X, а ее график - ***линией регрессии*** Y на X. Функция $f(x)$ может иметь разный вид: она может быть линейной, квадратичной, экспоненциальной и т.д. Поэтому п***ервая задача теории корреляции - установить форму корреляционной связи,*** т.е. вид функции регрессии. Чаще всего принимается, что функция регрессии является линейной. Если функция регрессии $f(x)$ линейна, то корреляцию называют ***линейной***; в противном случае - ***нелинейной.*** Очевидно, при линейной корреляции линия регрессии являются прямой линией.

Вторая задача теории корреляции - оценить тесноту (силу) корреляционной связи. Теснота корреляционной зависимости Y от X оценивается по величине рассеяния значений Y вокруг условного среднего $\overline{y}_x$. Большое рассеяние свидетельствует о слабой связи Y и X или даже об отсутствии зависимости. Малое рассеяние указывает на наличие достаточно сильной зависимости; возможно даже, что Y и X связаны функционально, но под действием второстепенных случайных факторов эта связь оказалась размытой, в результате чего при одном и том же значении *x* величина Y принимает разные значения.

Наглядно на графике тесноту связи можно оценить при помощи построения корреляционного поля. Действительно, для изучения корреляционной зависимости необходимо измерить два параметра у одного объекта (человека, животного и т.д.). Такие выборки называются связанными, поскольку числа в строках таблицы связаны или фамилией испытуемого или номером животного. Откладывая один из параметров на оси абсцисс, а другой на оси ординат, мы можем изобразить каждый объект в декартовой системе координат точкой на плоскости. Тогда все исследование изобразится некоторым распределением точек на плоскости. Оценивая тесноту расположения этих точек и их направленность, можно приблизительно оценить как вид корреляционной зависимости (линейная или нелинейная), так и оценить силу связи.

Например, в таблице 1 приведены результаты следующего эксперимента. Было сделано предположение, что чем выше уровень тревожности студента перед тестированием, тем больше он занимается и, следовательно, получает более высокие результаты тестирования. Исследование было проведено на 36 студентах. (Пример взят из Наследов А. Компьютерный анализ данных в психологии и социальных науках. Санкт-Петербург, «Питер», 2007, 416 с.)

Таблица 1

уровень тревожности (баллы)	8	3	2	7	6	5	9	9	4	3	6	7
результат теста (баллы)	13	12	10	14	15	12	13	12	10	8	16	15

2	8	8	2	6	3	9	6	6	4	8	7	10	7	3	4
10	14	12	7	16	9	12	16	14	10	14	16	12	18	12	12

6	7	6	7	5	8	5	7
15	17	16	17	14	15	14	17

На рисунке 1 результаты исследования приведены в графическом виде. Как видно из рисунка, корреляция между результатами тестирования и уровнем тревожности достаточно высокая, поскольку точки располагаются достаточно тесно друг к другу. Далее, очевидно, что это не линейная корреляция, а, скорее всего квадратичная, поскольку распределение точек имеет хорошо выделяемый максимум. Из рисунка также видна еще одна закономерность: при малых значениях уровня тревожности действительно с ростом уровня тревожности растут результаты тестирования, но когда уровень тревожности превышает 7 баллов, дальнейший рост уровня тревожности приводит к уменьшению результатов тестирования.

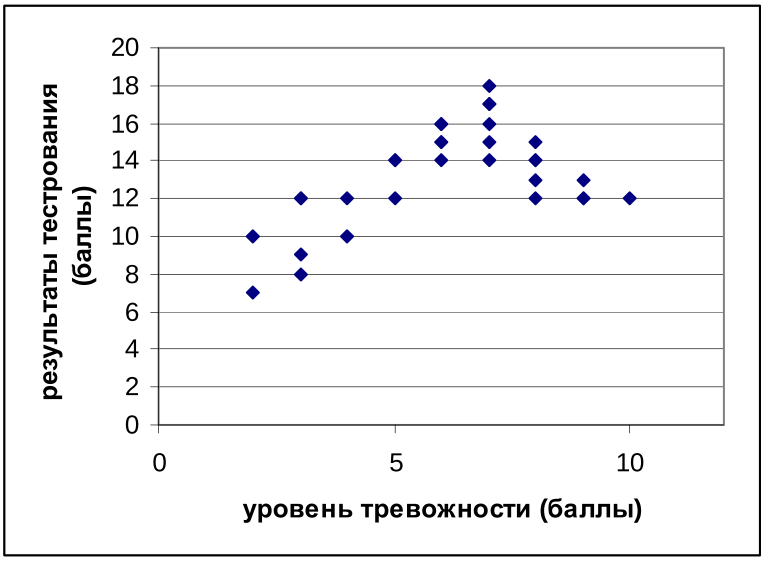


Рис 1. Корреляционное поле, демонстрирующее зависимость результатов тестирования от уровня тревожности

На рисунке 2 приведены примеры корреляционных полей в случае линейной корреляции и указаны оценки тесноты связи и вида связи (см. ниже), соответствующие тому или иному корреляционному полю.

Рис 2. Корреляционные поля и соответствующие им оценки тесноты связи и вида связи

КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ И ЕГО СВОЙСТВА

При изучении зависимостей между двумя случайными величинами, необходимо всегда помнить одно важное положение: математика не в состоянии ответить на вопрос что от чего ЗАВИСИТ. С помощью корреляционного анализа устанавливается только факт наличия или отсутствия СВЯЗИ. С точки зрения математики постановка задачи зависит ли тяжесть заболевания от пола также правомочна, как и задача: зависит ли пол от тяжести заболевания. Очевидно, что вторая постановка задачи просто абсурдна. Поэтому, переходя от проверки наличия или отсутствия связи к гипотезам о зависимости, исследователь должен привлекать свои априорные профессиональные знания, лежащие вне компетенции математических методов.

Для ответа на вопрос о наличии или отсутствии связи между двумя случайными величинами рассчитываются по выборке различные коэффициенты связи и проверяется достоверность их отличия от нуля. Только в том случае, если показано, что тот или иной коэффициент связи достоверно отличается от нуля, можно говорить о наличии связи между изучаемыми величинами.

Существует довольно большое разнообразие коэффициентов связи, соответствующее разнообразию случайных величин. В данном рассмотрении мы будем принимать, что имеем дело с непрерывными случайными величинами, распределенными по нормальному закону. Именно эти условия часто реализуются для случайных величин, изучаемых в ходе медицинского или биологического исследования. Кроме того, будем принимать гипотезу, что между исследуемыми случайными величинами существует линейная связь. В этом случае коэффициент связи носит название коэффициента корреляции Пирсона.

СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ

Коэффициент корреляции Пирсона изменяется в пределах от -1 до +1. Значение коэффициента корреляции равное -1 или +1 означает, что между переменными существует строгая линейная связь, и эта связь может быть выражена математической формулой: $y = kx + b$. Если значение коэффициента корреляции по модулю находится ближе к 1, это означает наличие сильной связи, а если ближе к 0 — связь слабая или вообще отсутствует.

Следующий шаг состоит в том, чтобы ответить на вопрос: какая это связь прямая или обратная. Если значение коэффициента корреляции **положительное**, это означает, что **связь прямая** (то есть, при увеличении (уменьшении) одной случайной величины, увеличивается (уменьшается) другая). В противном случае, если значение коэффициента корреляции **отрицательное**, то **связь обратная** (увеличение (уменьшение) одной случайной величины приводит к уменьшению (увеличению) другой).

Относительно силы связи можно принять следующую градацию.

Таблица 2

Значения коэффициента корреляции	0,1 – 0,3	0,3 – 0,5	0,5 – 0,7	0,7 – 0,9	0,9 – 0,99
Характеристика силы связи	Слабая	Умеренная	Значительная	Сильная	Очень сильная

Общий алгоритм решения задач по изучению уровня линейной связи между двумя переменными.

В общем случае задача может формулироваться следующим образом: Ответить на вопрос: существует ли линейная связь между двумя случайными величинами? Если да, то определить направленность этой связи и ее силу.

Решение данной задачи можно свести к следующему алгоритму:

1) Вычисление коэффициента связи (корреляции)
2) Проверка значимости коэффициента (достоверно ли он отличается от нуля?)
3) Определение по знаку коэффициента корреляции и по его значению характера связи и ее силы
4) Определение коэффициента детерминации.

1. Вычисление коэффициента связи (корреляции)

Пусть у нас есть **n** пар измерений двух случайных величин X и Y (коэффициент корреляции можно вычислить ТОЛЬКО для связанных выборок) распределенных по нормальному закону, тогда коэффициент корреляции Пирсона можно вычислить по следующей формуле:

$$r_{x,y} = \frac{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad (2)$$

В уравнении (2): $\bar{x}$ и $\bar{y}$ - соответственно средние арифметические для выборок из случайных величин X и Y, σ_x и σ_y – среднеквадратичные отклонения, оцененные по тем же выборкам, $y_i; x_i$ - полученные в эксперименте пары измерений для случайных величин Y и X .

2. Проверка значимости коэффициента (достоверно ли он отличается от нуля)

Как всегда в статистике, формула (2) дает точечное значение коэффициента корреляции. Для ответа на вопрос: значимо ли он отличается от нуля (т.е. есть ли связь?) необходимо построить доверительный интервал и посмотреть: попадает ли в этот интервал нулевое значение. Если попадает, то мы не имеем право говорить, что связь существует, если нет, то с той вероятностью, с которой строился доверительный интервал, мы может считать, что связь действительно существует. Вычисление точных значений доверительного интервала достаточно сложно. Однако существует более простой способ. Для определения достоверности отличия от нуля коэффициента корреляции Пирсона, можно использовать Таблицу приложения 10. Для этого необходимо:

- Рассчитать точечное значение коэффициента корреляции по формуле (2)
- Задаться уровнем достоверности (0,95; 0,99 или 0,999) и войти в таблицу приложения 10, учитывая число проведенных пар измерений **n.**
- Сравнить полученную точечную оценку коэффициента корреляции с табличным значением. Если оценка больше или равна табличному значению, коэффициент корреляции достоверно отличается от нуля на данном уровне значимости и, следовательно, можно сделать заключение, что связь между изучаемыми случайными величинами действительно существует.

Например, проведя 20 пар измерений двух случайных величин и проведя расчеты по формуле (2), мы получили значение $r_{x,y} = 0{,}754$. Достоверно ли это значение отличается от нуля? Для ответа на этот вопрос входим в таблицу приложения 5 по двадцатой строке. Для уровня значимости 0,05, чтобы сделать заключение о наличии связи необходимо, чтобы значение выборочной оценки коэффициента корреляции было больше 0,444. Для уровня значимости 0,01 это значение должно быть больше чем 0,561, а для уровня значимости 0,001 – больше чем 0,679. Поскольку в нашем случае выборочная оценка равна 0,754, мы можем заключить, что с вероятностью 0,999 связь между изучаемыми случайными величинами действительно существует.

3. Определение по знаку коэффициента корреляции и по его значению характера связи и ее силы

Этот вопрос достаточно прост: поскольку значение коэффициента корреляции положительное, следовательно связь прямая.

4. Коэффициент детерминации.

Чаще всего в исследовании, мы не в состоянии контролировать все факторы, могущие влиять на изучаемые случайные величины. Поэтому представляется важным знать какая часть изменчивости одной случайной величины определяется изменчивостью другой, а какая происходит от неконтролируемых факторов.

Ответ на эти вопросы дает коэффициент детерминации. Коэффициент детерминации определяется по формуле (в процентах):

$$d = r^2 \cdot 100 \; (3)$$

В этой формуле d –коэффициент детерминации, r – коэффициент корреляции. Допустим, мы изучали изменение верхнего артериального давления в зависимости от секреции надпочечников и получили коэффициент корреляции равный 0,567. Тогда коэффициент детерминации будет равен:

$$d = 0{,}567^2 \cdot 100 \approx 32\%$$

Таким образом, мы приходим к заключению, что изменчивость верхнего артериального давления в данном случае только на 32% объясняется изменчивостью секреции коры надпочечников, а на 68% другими факторами.

		120	-19,6	-17,5	343
		125	-14,6	-12,5	182,5
		145	-4,6	7,5	-34,5
5	170	150	0,4	12,5	5
6	175		5,4	12,5	67,5
7	160		-9,6	-7,5	72
8	180		10,4	7,5	78

9	185		15,4	12,5	192,5
10	170		0,4	-7,5	-3
11	175		5,4	-2,5	-13,5
12	190		20,4	2,5	51

$$r_{x,y} = \frac{\frac{1}{12-1} \cdot 1012{,}5}{12{,}1 \cdot 10{,}6} = 0{,}718$$

Итак, коэффициент корреляции получился равным 0,718.

Определим, достоверно ли он отличается от нуля. Для этого используем Таблицу 10 приложения. У нас 12 пар измерений, поэтому входим в Таблицу по 12 строке. На пересечении 12 строки и столбца Р=0,05 стоит число 0,576. Полученный коэффициент корреляции (0,718) больше этого числа. Следовательно, на этом уровне коэффициент корреляции достоверно отличается от нуля, то есть связь есть. На пересечении этой же строки и столбца Р=0,01 стоит число 0,708. Поскольку коэффициент корреляции больше и этого числа, следовательно, мы можем говорить, что связь существует и на этом более значимом уровне. Итак, ответ на первый вопрос таков: существование связи высоко достоверно. Далее, поскольку получено положительное значение коэффициента корреляции, мы заключаем, что связь прямая. Используя Таблицу 2 данного раздела, мы приходим к заключению, что связь сильная.

Найдем коэффициент детерминации:

$$d = r^2 \times 100 = 0{,}718^2 \times 100 = 0{,}516 \times 100 = 51{,}6\ (\%)$$

Таким образом, систолическое артериальное давление после лечения на 51,6 % определяется систолическим артериальным давлением до лечения, а на 48,4 % другими факторами.

Рекомендуемая литература:

1. Лобоцкая Н.Л. Основы высшей математики. Минск: Вышэйшая школа, 1973. - 352 с.
2. Урбах В.Ю. Статистический анализ в биологических и медицинских исследованиях М: Медицина - 1975 - 297 с.
3. Лакин Г.Ф. Биометрия. М: Высшая школа -1980 - 291 с.

4. Реброва О.Ю. Статистический анализ медицинских данных. Применение пакета прикладных программ STATISTICA. М., МедиаСфера, 2002. 312 с.
5. Петри А., Сэбин К. Наглядная статистика в медицине. М., Издательский дом Геотар-Мед.,2003. 143 с.
6. Флетчер Р., Флетчер С., Вагнер Э. Клиническая эпидемиология. М., МедиаСфера, 1998. 352 с.
7. Власов В.В. Эпидемиология. М., Издательский дом Геотар-Мед., 2004. 462 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица основных формул дифференцирования функций

1. $(C)'_x = 0$
2. $(x)'_x = 1$
3. $(x^n)'_x = nx^{n-1}$
4. $(a^x)'_x = a^x \ln a$
5. $(e^x)'_x = e^x$
6. $(\lg x)'_x = \frac{1}{x} \cdot 0{,}4343$
7. $(\ln x)'_x = \frac{1}{x}$
8. $(\sin x)'_x = \cos x$
9. $(\cos x)'_x = -\sin x$
10. $(tgx)'_x = \frac{1}{\cos^2 x}$
11. $(ctgx)'_x = -\frac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(arctgx)'_x = \frac{1}{1+x^2}$
15. $(arctgx)'_x = \frac{1}{1+x^2}$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Правила дифференцирования сложных функций

1. $\left(u^n\right)'_x = nu^{n-1}u'_x$
2. $\left(u+\vartheta-\omega\right)'_x = u'_x+\vartheta'_x-\omega'_x$
3. $\left(u\vartheta\right)'_x = \vartheta u'_x+u\vartheta'_x$
4. $\left(Cu\right)'_x = Cu'_x;$
5. $\left(\dfrac{u}{\vartheta}\right)'_x = \dfrac{\vartheta u'_x-u\vartheta'_x}{\vartheta^2}$
6. $\left(a^u\right)'_x = a^u u'_x\ln a$
7. $\left(e^u\right)'_x = e^u u'_x$
8. $\left(\log_a u\right)'_x = \dfrac{u'_x}{u\ln a}$
9. $\left(\lg u\right)'_x = \dfrac{u'_x}{u\ln 10} \approx \dfrac{u'_x}{u}\cdot 0,4343$
10. $\left(\ln u\right)'_x = \dfrac{u'_x}{u}$
11. $\left(\sin u\right)'_x = \cos u\cdot u'_x$
12. $\left(\cos u\right)'_x = -\sin u\cdot u'_x$
13. $\left(\mathrm{tg}\,u\right)'_x = \dfrac{1}{\cos^2 u}u'_x$
14. $\left(\mathrm{ctg}\,u\right)'_x = -\dfrac{u'_x}{\sin^2 u}$
15. $\left(\arcsin u\right)'_x = \dfrac{u'_x}{\sqrt{1-u^2}}$
16. $\left(\arccos u\right)'_x = -\dfrac{u'_x}{\sqrt{1-u^2}}$
17. $\left(\mathrm{arctg}\,u\right)'_x = \dfrac{u'_x}{1+u^2}$
18. $\left(\mathrm{arcctg}\,u\right)'_x = -\dfrac{u'_x}{1+u^2}.$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Основные формулы интегрирования

1. $\int dx = x + C.$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1.$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

5. $\int e^x dx = e^x + C.$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

12. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C.$

13. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C.$

14. $\int co\sec x dx = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$

15. $\int co\sec x dx = \ln\left|ctg\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right| + C.$

16. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2} arctg\frac{x}{a} + C.$

17. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x} + C.$

18. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a} + C.$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a}\right) + C.$

21. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

22. $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+C.$

23. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C.$

24. $\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$

25. $\int \arccos x\,dx = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$

26. $\int arctgx dx = xarctgx - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C.$

27. $\int arcctgx dx = xarcctgx + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C.$

28. $\int arc\sec x dx = xarc\sec x - \ln\left(\sqrt{x^2-1}+|x|\right)+C.$

29. $\int \arccos ecx dx = x\arccos ecx + \ln\left(\sqrt{x^2-1}+|x|\right)+C.$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Значения функции распределения нормированной нормально распределенной случайной величины $\Phi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5536	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6879	6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8189
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8963	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9167
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9965	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Значения коэффициента Стьюдента t.

P / n-1	0,95	0,99	0,999	P / n-1	0,95	0,99	0,999
1	12,706	63,657	636,619	18	2,103	2,878	3,992
2	4,303	9,925	31,598	19	2,093	2,861	3,883
3	3,182	5,841	12,941	20	2,086	2,845	3,850
4	2,776	4,604	8,610	21	2,080	2,831	3,819
5	2,571	4,032	6,859	22	2,074	2,819	3,792
6	2,447	3,707	5,959	23	2,069	2,807	3,767
7	2,365	3,499	5,405	24	2,064	2,797	3,745
8	2,306	3,355	5,041	25	2,060	2,787	3,725
9	2,262	3,250	4,781	26	2,056	2,779	3,707
10	2,228	3,169	4,587	27	2,052	2,771	3,690
11	2,201	3,106	4,487	28	2,048	2,763	3,674
12	2,179	3,055	4,318	29	2,045	2,756	3,659
13	2,160	3,012	4,221	30	2,042	2,750	3,646
14	2,145	2,977	4,140	40	2,021	2,704	3,551
15	2,131	2,947	4,073	60	2,000	2,660	3,460
16	2,120	2,921	4,015	120	1,980	2,617	3,374
17	2,110	2,898	3,965	∞	1,960	2,576	3,291

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Тригонометрические функции суммы и разности углов, кратных и половинных углов

1. $sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha\, cos\beta \pm cos\alpha\, sin\beta.$
2. $cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha\, cos\beta \mp sin\alpha\, sin\beta.$
3. $tg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha tg\beta}.$
4. $ctg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{ctg\alpha ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}$
5. $sin\,2\alpha = 2\,sin\,\alpha\, cos\,\alpha$
6. $cos\,2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$
7. $tg\,2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}.$
8. $sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - cos\alpha}{2}}.$
9. $cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + cos\alpha}{2}}$
10. $tg\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - cos\alpha}{sin\,\alpha}$

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

Произведения и степени тригонометрических функций

1. $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right).$
2. $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right).$
3. $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right).$
4. $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos2\alpha}{2}.$
5. $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos2\alpha}{2}.$
6. $\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin3\alpha}{4}.$
7. $\cos^3\alpha = \frac{\cos3\alpha + 3\cos\alpha}{4}.$

ПРИЛОЖЕНИЕ 8

Некоторые часто встречающиеся величины

$\pi = 3{,}14159.$

$\pi^2 = 9{,}86960.$

$\sqrt{\pi} = 1{,}77245.$

$e = 2{,}71828.$

$\frac{1}{e} = 0{,}36788.$

$\lg e = 0{,}43429.$

$\ln 2 = 0{,}693315.$

$\ln 10 = 2{,}30258.$

$\ln\pi = 1{,}14473.$

$\sqrt{2} = 1{,}41421.$

$\sqrt{3} = 1{,}73205.$

$1^\circ = 0{,}017453$ *рад*.

$1' = 0{,}000291$ *рад*.

$1'' = 0{,}0000048$ *рад*.

ПРИЛОЖЕНИЕ 9

Значения тригонометрических функций для углов, кратных 30° и 45° ($\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{4}$)

Функция	Углы							
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1/2	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$
ctg	$\mp\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$-\sqrt{3}/3$	-1	$-\sqrt{3}$
sec	1	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}$	2	$\pm\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	$-2\sqrt{3}/3$
cosec	$\mp\infty$	2	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}/3$	1	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}$	2

Функция	Углы								
	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin	0	-1/2	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1/2	0
cos	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1/2	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0
ctg	$\mp\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$-\sqrt{3}/3$	-1	$-\sqrt{3}$	$\mp\infty$
sec	-1	$-2\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{2}$	-2	$\mp\infty$	2	$\sqrt{2}$	$-2\sqrt{3}/3$	1
cosec	$\pm\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	$-2\sqrt{3}/3$	-1	$-2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{2}$	-2	$\mp\infty$

ПРИЛОЖЕНИЯ 10

Коэффициент корреляции Пирсона. Определение достоверности отличия от нуля.

Объем выборки	Двусторонее значение p		
	0,05	0,01	0,001
5	0,878	0,959	0,991
6	0,811	0,917	0,974
7	0,755	0,875	0,951
8	0,707	0,834	0,925
9	0,666	0,798	0,898
10	0,632	0,765	0,872
11	0,602	0,735	0,847
12	0,576	0,708	0,823
13	0,553	0,684	0,801
14	0,532	0,661	0,780
15	0,514	0,641	0,760
16	0,497	0,623	0,742
17	0,482	0,606	0,725
18	0,468	0,590	0,708
19	0,456	0,575	0,693
20	0,444	0,561	0,679
21	0,433	0,549	0,665
22	0,423	0,537	0,652
23	0,413	0,526	0,640
24	0,404	0,515	0,629
25	0,396	0,505	0,618
26	0,388	0,496	0,607
27	0,381	0,487	0,597
28	0,374	0,479	0,588
29	0,367	0,471	0,579
30	0,361	0,463	0,570
35	0,334	0,430	0,532
40	0,312	0,403	0,501
45	0,294	0,380	0,474
50	0,279	0,361	0,451
55	0,266	0,345	0,432
60	0,254	0,330	0,414
70	0,235	0,306	0,385
80	0,220	0,286	0,361
90	0,207	0,270	0,341
100	0,217	0,283	0,357
150	0,160	0,210	0,266